Jost Bürgi

400. Logarithmen-Jubiläumsjahr

Die geniale Erfindung der Potenzentabelle

Klaus Truemper
University of Texas at Dallas

Ein wenig Mathematik

Gegeben:
$x = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (m mal der Faktor a)
$y = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (n mal)

Dann:
$x \cdot y = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ ($m + n$ mal)

Ein wenig Mathematik

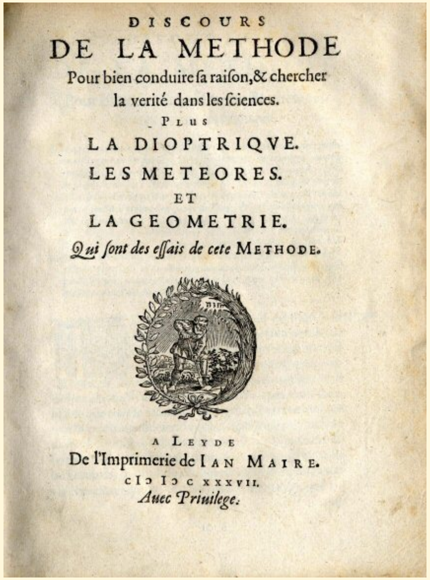
Gegeben:
$x = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (m mal der Faktor a)
$y = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (n mal)

Dann:
$x \cdot y = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ ($m + n$ mal)

René Descartes (1596–1650) erfand 1637 die moderne Notation

$$x = a^m$$
$$y = a^n$$
$$x \cdot y = a^{m+n}$$

m, n, $m + n$ sind **Exponenten** von a und auch **Logarithmus** von x, y, z mit **Basis** a.



DISCOURS
DE LA METHODE
Pour bien conduire ſa raiſon, & chercher
la verité dans les ſciences.
PLUS
LA DIOPTRIQVE.
LES METEORES.
ET
LA GEOMETRIE.
Qui ſont des eſſais de cete METHODE.

A LEYDE
De l'Imprimerie de IAN MAIRE.
CIↃ IↃ C XXXVII.
Auec Priuilege.

Eine Frage

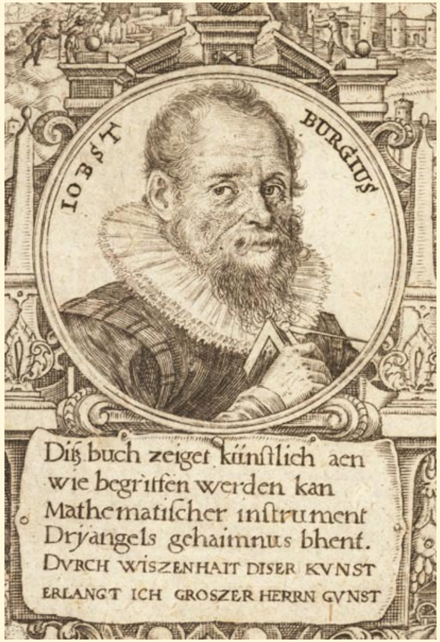
Die zeitraubende **Multiplikation** $x \cdot y$ kann also durch die einfache **Addition** $m + n$ ersetzt werden.

Ebenso kann die **Division** x/y auf die **Subtraktion** $m - n$ reduziert werden, sowie die **Potenzberechnung** auf die **Multiplikation**, und das **Wurzelziehen** auf die **Division.**

Eine Frage

Die zeitraubende **Multiplikation** $x \cdot y$ kann also durch die einfache **Addition** $m + n$ ersetzt werden.

Ebenso kann die **Division** x/y auf die **Subtraktion** $m - n$ reduziert werden, sowie die **Potenzberechnung** auf die **Multiplikation**, und das **Wurzelziehen** auf die **Division.**



Frage: Wieso hat **Jost Bürgi (1552–1632)** das als erster gegen 1600 für effizientes Rechnen genutzt?

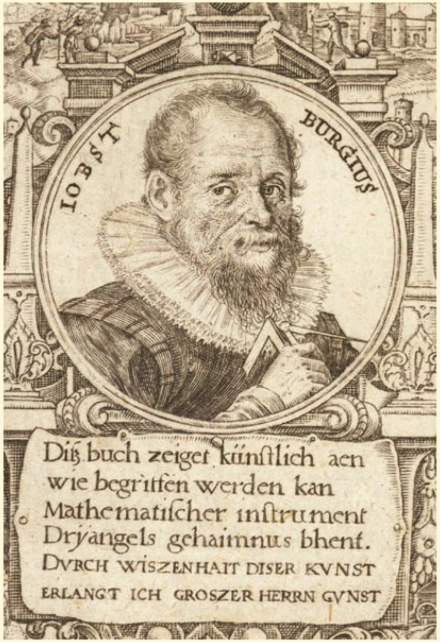
Die Antwort ist einfach . . .

Eine Frage

Die zeitraubende **Multiplikation** $x \cdot y$ kann also durch die einfache **Addition** $m + n$ ersetzt werden.

Ebenso kann die **Division** x/y auf die **Subtraktion** $m - n$ reduziert werden, sowie die **Potenzberechnung** auf die **Multiplikation**, und das **Wurzelziehen** auf die **Division.**

Frage: Wieso hat **Jost Bürgi (1552–1632)** das als erster gegen 1600 für effizientes Rechnen genutzt?



Die Antwort ist einfach . . .

Er war eben ein genialer Mathematiker.

Was stand ihm denn zur Verfügung?

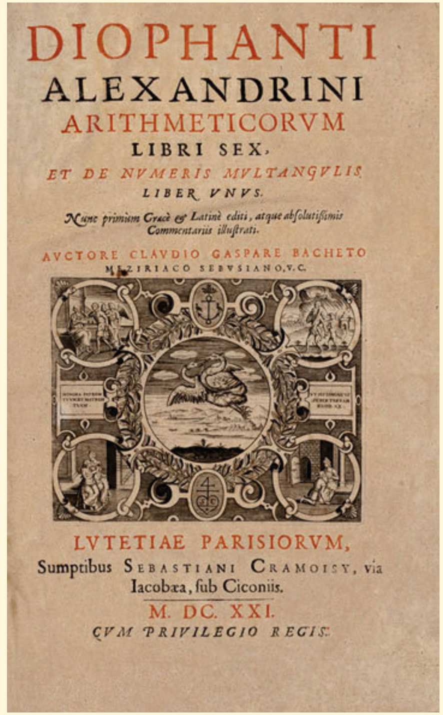
Vorgeschichte: Exponenten für Variablen

Diophantus von Alexandria (ca. 201-214 — ca. 284-298)
schrieb dreizehn Bücher über die Lösung von Gleichungen.

Vorgeschichte: Exponenten für Variablen

Diophantus von Alexandria (ca. 201-214 — ca. 284-298) schrieb dreizehn Bücher über die Lösung von Gleichungen.

Heute wird die Sammlung als ***Arithmetica*** bezeichnet.



Von den dreizehn Büchern sind drei verloren gegangen.

Einige der restlichen zehn Bücher – sechs griechische Manuskripte und vier arabische Übersetzungen – werden nach mehr als 1700 Jahren immer noch gedruckt.

Arithmetica hat eigenartige Symbole für die Produkte einer Variablen . . .

Eigenartige Symbole

Diophantus benutzte für uns eigenartige Symbole, um die Produkte einer Variablen darzustellen. Was bedeutet z.B. folgende Gleichung, wobei " $\cdot$ " und " $=$ " moderne Notation sind?

$$\Delta^{\Upsilon} \cdot \Delta^{\Upsilon}\Delta = K^{\Upsilon}K$$

Eigenartige Symbole

Diophantus benutzte für uns eigenartige Symbole, um die Produkte einer Variablen darzustellen. Was bedeutet z.B. folgende Gleichung, wobei " $\cdot$ " und " $=$ " moderne Notation sind?

$$\Delta^Y \cdot \Delta^Y \Delta = K^Y K$$

Die Lösung:

x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6
δ	Δ^Y	K^Y	$\Delta^Y\Delta$	ΔK^Y	$K^Y K$

Wir haben also:

$x^2 \cdot x^4 = x^6$
$\Delta^Y \cdot \Delta^Y \Delta = K^Y K$

Weitere Beispiele für Produkte einer Variablen . . .

Weitere Beispiele

Nicolas Chuquet (ca. 1455 – ca. 1500):

12^0, 12^1, 12^2, . . . bedeutet 12, $12x$, $12x^2$, . . .

$12^{1.\tilde{m}}$ bedeutet $12x^{-1}$

Weitere Beispiele

Nicolas Chuquet (ca. 1455 – ca. 1500):

12^0, 12^1, 12^2, . . . bedeutet $12, 12x, 12x^2, \ldots$

$12^{1.\tilde{m}}$ bedeutet $12x^{-1}$

Pietro Antonio Cataldi (1548–1626)

53 *via* 84 fà 407 bedeutet $5x^3 \cdot 8x^4 = 40x^7$

Weitere Beispiele

Nicolas Chuquet (ca. 1455 – ca. 1500):

12^0, 12^1, 12^2, . . . bedeutet 12, $12x$, $12x^2$, . . .

$12^{1.\tilde{m}}$ bedeutet $12x^{-1}$

Pietro Antonio Cataldi (1548–1626)

53 *via* 84 fà 407 bedeutet $5x^3 \cdot 8x^4 = 40x^7$

Adrianus Romanus (1561–1615)

$1(\overline{\underline{45}})$ bedeutet x^{45}

Bürgi hat eine Notation, die klar zwischen Koeffizienten und Exponenten differenziert . . .

Jost Bürgi (Dokument erstellt vor 1601. 1923 befand es sich in der Bücherei der Sternwarte in Pulkowa bei St. Petersburg. Heute?)

Die Römische Zahl ist Exponent einer Variablen.

$\overset{\textit{vi}}{4} \cdot \overset{\textit{iii}}{3} = \overset{\textit{vi}+\textit{iii}}{12} = \overset{\textit{ix}}{12}$ bedeutet $4x^6 \cdot 3x^3 = 12x^{6+3} = 12x^9$

Johannes Kepler (1571–1630) übernahm diese Notation.

Die Entwicklung der Exponenten für Zahlen verlief anders . . .

Vorgeschichte: Exponenten für Zahlen

Die Griechen des Altertums definierten Zahlen mittels Buchstaben des Alphabets:

$\mathbf{A} = \mathbf{1},\ \mathbf{B} = \mathbf{2},\ \mathbf{\Gamma} = \mathbf{3},\ \ldots$

$\mathbf{I} = \mathbf{10},\ \mathbf{K} = \mathbf{20},\ \mathbf{\Lambda} = \mathbf{30},\ \ldots$

$\mathbf{P} = \mathbf{100},\ \mathbf{\Sigma} = \mathbf{200},\ \mathbf{T} = \mathbf{300},\ \ldots$

${}^{\mathbf{A}}\text{Ϡ} = \mathbf{1\,000},\ {}^{\mathbf{B}}\text{Ϡ} = \mathbf{2\,000},\ {}^{\mathbf{\Gamma}}\text{Ϡ} = \mathbf{3\,000},\ \ldots$
(Ϡ ist der archaische Buchstabe Sampi)

Die größte Zahl, die mit einem Buchstaben dargestellt werden konnte . . .

$\mathbf{M} = \mathbf{10\,000}$ (1 Myriade)

Bedeutete damals wie heute noch "eine sehr große Menge".

Apollonius von Perga (240 – ca. 190 v. Chr.) definierte mit **M** und den ersten Buchstaben des Alphabets folgende Zahlen:

$\overset{\alpha}{\mathbf{M}} = \mathbf{10\,000^1}$; $\overset{\beta}{\mathbf{M}} = \mathbf{10\,000^2}$; $\overset{\gamma}{\mathbf{M}} = \mathbf{10\,000^3}$; $\overset{\delta}{\mathbf{M}} = \mathbf{10\,000^4}$; ...

Schon 400 Jahre vorher gab es eine viel größere Zahl ...

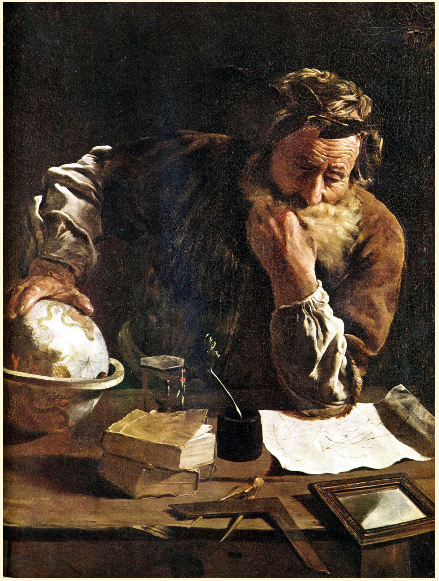
Archimedes: Sandzahl

Archimedes (287(?)–212 v. Chr.) konstruierte eine riesige Zahl, mit der er die Behauptung widerlegte, dass die Sandkörner am Strand des Meeres nicht gezählt werden können.

Archimedes: Sandzahl

Archimedes (287(?)–212 v. Chr.) konstruierte eine riesige Zahl, mit der er die Behauptung widerlegte, dass die Sandkörner am Strand des Meeres nicht gezählt werden können.

Sandzahl = die Anzahl der Sandkörner, die das Universum füllen würden.



Archimedes bewies – in moderner Notation

Sandzahl $\leq \mathbf{10^{8\cdot 10^8}} = \mathbf{10^{800\,000\,000}}$

Für den Beweis erstellte er folgendes

Theorem: $\mathbf{a}^{m} \cdot \mathbf{a}^{n} = \mathbf{a}^{m+n}$

Viele Jahrhunderte wurde das Resultat ignoriert ...

Exponenten für Zahlen

In der Tat, lange Zeit fand man Exponenten für Zahlen unnötig.

Wenn z.B. $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ auftrat, berechnete man das Resultat und setzte 81 $(= 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3)$ ein.

Deshalb brauchte man keine Kurzform wie 3^4.

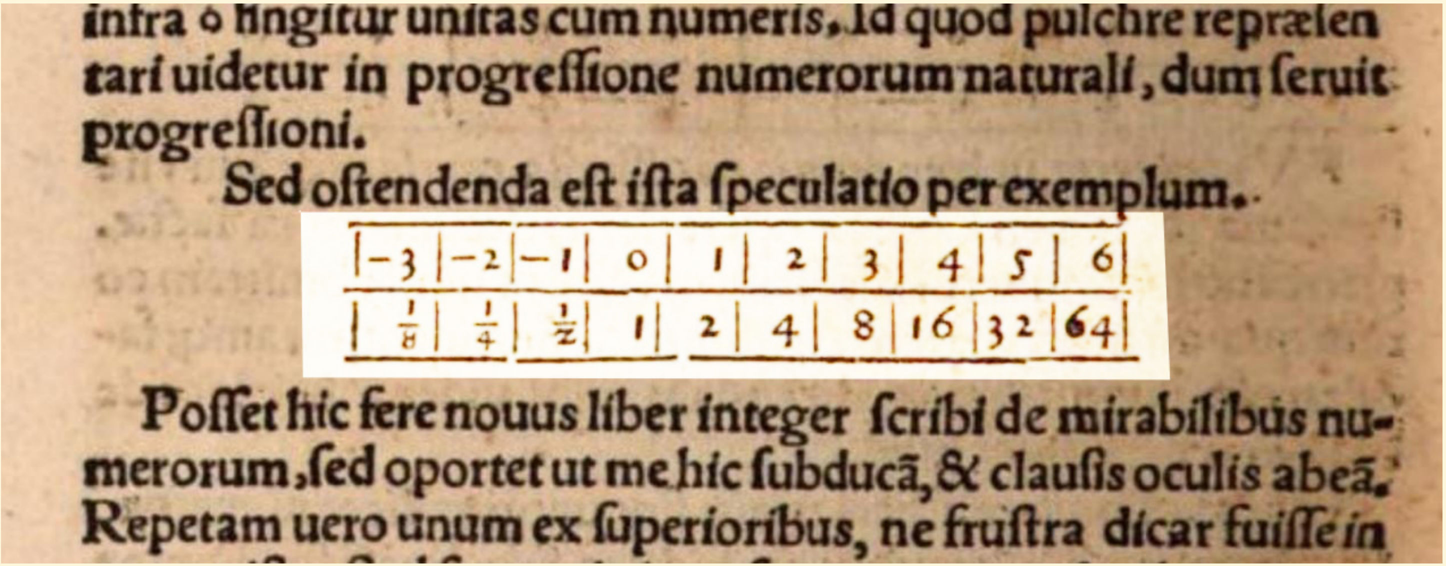
Die Idee eines Exponenten für Konstanten taucht nach Archimedes erst 1544 wieder auf . . .

Die erste Potenzentabelle

Im Jahr 1544 veröffentlichte **Michael Stifel (1487–1567)** in ***Arithmetica Integra*** eine eigenartige Tabelle.

Die erste Potenzentabelle

Im Jahr 1544 veröffentlichte **Michael Stifel (1487–1567)** in ***Arithmetica Integra*** eine eigenartige Tabelle.



infra o fingitur unitas cum numeris, id quod pulchre repræſen
tari uidetur in progreſſione numerorum naturali, dum ſeruit
progreſſioni.

Sed oſtendenda eſt iſta ſpeculatio per exemplum.

−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64

Poſſet hic fere nouus liber integer ſcribi de mirabilibus nu-
merorum, ſed oportet ut me hic ſubducã, & clauſis oculis abeã.
Repetam uero unum ex ſuperioribus, ne fruſtra dicar fuiſſe in

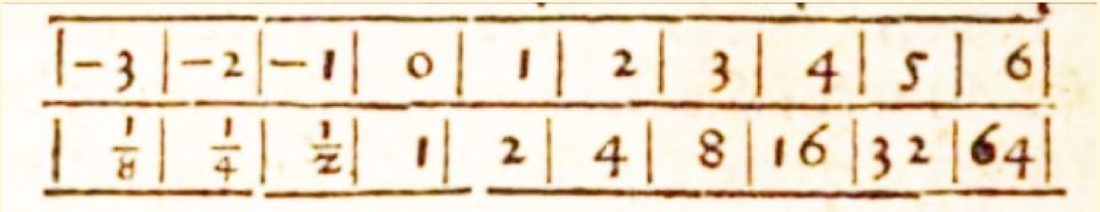
Benutzung der Tabelle

−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64

Oben: **Exponenten** n (Stifels Definition)

Unten: **Zahlen** (moderne Notation: 2^n; **Basis** $= 2$)

Benutzung der Tabelle



−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64

Oben: **Exponenten** n (Stifels Definition)
Unten: **Zahlen** (moderne Notation: 2^n; **Basis** $= 2$)

Die **Multiplikation** $\frac{1}{4} \cdot 8 = 2$ wird auf die **Addition** $-2 + 3 = 1$ reduziert.

$$\begin{array}{cccccc} \boxed{-2} & -1 & 0 & 1 & 2 & \boxed{3} \\ \hline \boxed{\mathbf{\frac{1}{4}}} & \frac{1}{2} & 1 & 2 & 4 & \boxed{\mathbf{8}} \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{cccccc} -2 & -1 & 0 & \boxed{1} & 2 & 3 \\ \hline \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & \boxed{\mathbf{2}} & 4 & 8 \end{array}$$

Benutzung der Tabelle

−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64

Oben: **Exponenten** n (Stifels Definition)
Unten: **Zahlen** (moderne Notation: 2^n; **Basis** $= 2$)

Die **Multiplikation** $\frac{1}{4} \cdot 8 = 2$ wird auf die **Addition** $-2 + 3 = 1$ reduziert.

$$\begin{array}{cccccc} \boxed{-2} & -1 & 0 & 1 & 2 & \boxed{3} \\ \hline \boxed{\mathbf{\tfrac{1}{4}}} & \frac{1}{2} & 1 & 2 & 4 & \boxed{\mathbf{8}} \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{cccccc} -2 & -1 & 0 & \boxed{1} & 2 & 3 \\ \hline \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & \boxed{\mathbf{2}} & 4 & 8 \end{array}$$

Problem: Die zweite Zeile enthält nicht alle Zahlen.
Wie kann das vermieden werden?

Bürgis Lösung

Vor 1600, also rund fünf Jahrzehnte nach Stifel, stellt Bürgi folgende Überlegungen an.

Ziel: Eine Potenzentabelle für alle Zahlen, die mit manuellem Rechnen relativ leicht erstellt werden kann.

Bürgis Lösung

Vor 1600, also rund fünf Jahrzehnte nach Stifel, stellt Bürgi folgende Überlegungen an.

Ziel: Eine Potenzentabelle für alle Zahlen, die mit manuellem Rechnen relativ leicht erstellt werden kann.

Definition: Mit **Skalieren** meinen wir immer eventuell wiederholte Multiplikation mit 10 oder $1/10$.

Mit Skalieren reduzieren wir u. a. die großen Zahlen der Potenzentabelle, in der Hoffnung, dass Bürgis Idee so klarer wird.

Die Lösung beruht auf drei Ideen ...

Drei Ideen

1. Die Tabelle braucht nur Dezimalzahlen zwischen 1.0 und 10.0 zu haben. Vor Anwendung der Tabelle werden alle außerhalb liegenden Zahlen durch Skalieren in diesen Bereich gebracht.

Drei Ideen

1. Die Tabelle braucht nur Dezimalzahlen zwischen 1.0 und 10.0 zu haben. Vor Anwendung der Tabelle werden alle außerhalb liegenden Zahlen durch Skalieren in diesen Bereich gebracht.

2. Die Basis muss so gewählt sein, dass die Zahlen der Tabelle leicht berechnet werden können.

Drei Ideen

1. Die Tabelle braucht nur Dezimalzahlen zwischen 1.0 und 10.0 zu haben. Vor Anwendung der Tabelle werden alle außerhalb liegenden Zahlen durch Skalieren in diesen Bereich gebracht.

2. Die Basis muss so gewählt sein, dass die Zahlen der Tabelle leicht berechnet werden können.

3. Die Tabelle muss genügend Zahlen zwischen 1.0 und 10.0 haben, so dass die Exponenten für die fehlenden Zahlen durch Interpolieren ausreichend genau berechnet werden können.

Wahl der Basis . . .

Bürgis geniale Basis

Die **Basis** hat die Form $1.0\ldots01$, wobei die genaue Form noch bestimmt werden muss.

Grund: Dann lassen sich die Zahlen ganz einfach berechnen.

Bürgis geniale Basis

Die **Basis** hat die Form $1.0\ldots01$, wobei die genaue Form noch bestimmt werden muss.

Grund: Dann lassen sich die Zahlen ganz einfach berechnen.

Beispiel: Gegeben sei $1.0001^{3500} = 1.41904272$

Die nächste Zahl ist $1.0001^{3501} = 1.0001 \cdot 1.41904272 =$

$$\begin{array}{rl} & 1.41904272 \\ + & \underline{0.000141904272} \\ & 1.41918462 \end{array}$$

Bürgi benötigt also nur die Addition zur Berechnung der Tabelle.

Wie hat er die spezielle Form für $1.0\ldots01$ bestimmt?

Bürgis Wahl für $1.0\ldots01$

Je kleiner $1.0\ldots01$, desto mehr Zahlen fallen in den Bereich 1.0 bis 10.0

Bürgi wollte die Basis so klein ansetzen, dass er die Zahlen gerade noch berechnen konnte.

Er konnte den Rechenaufwand einfach abschätzen.

Bürgis Wahl für $1.0\ldots01$

Je kleiner $1.0\ldots01$, desto mehr Zahlen fallen in den Bereich 1.0 bis 10.0

Bürgi wollte die Basis so klein ansetzen, dass er die Zahlen gerade noch berechnen konnte.

Er konnte den Rechenaufwand einfach abschätzen.

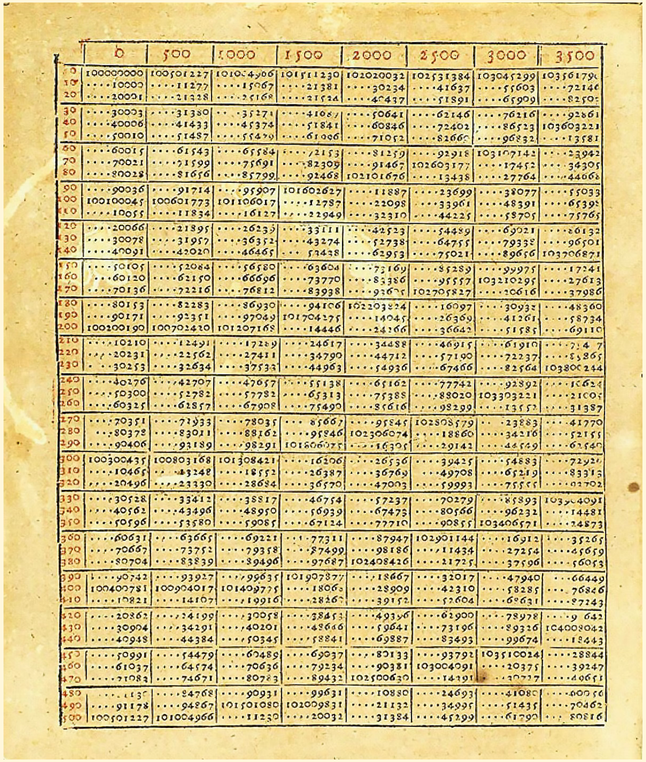
Für die Basis 1.1 liegen $N = 24$ Zahlen zwischen 1.0 und 10.0. Eine einfache Überlegung: $1.1 \approx 1.01^{10}$ $\quad 1.01 \approx 1.001^{10}$ etc.

Basis 1.01	$N \approx 240$	genau	$N = 231$
1.001	$N \approx 2\,400$		$N = 2\,303$
1.0001	$N \approx 24\,000$	$\leftarrow$ Bürgis Wahl, mit	$N = 23\,027$
1.00001	$N \approx 240\,000$		$N = 230\,259$

Sehr genau: $10.000\,000\,00 = 1.0001^{23027.0022033}$ (Bürgi 23027.0022)

Die Potenzentabelle erscheint 1620

Rote Exponenten n Schwarze Zahlen 1.0001^n



	0	500	1000	1500	2000	2500	3000	3500
0	100000000	100501227	101004966	101511230	102020032	102531384	103045299	10356179
10	····10000	····11277	····15067	····21381	····30234	····41637	····55603	····72146
20	····20001	····21328	····25168	····31524	····40437	····51891	····65909	····82505
30	····30003	····31380	····35271	····41087	····50641	····62146	····76216	····92861
40	····40006	····41433	····45374	····51841	····60846	····72402	····86523	103603221
50	····50010	····51487	····55479	····61096	····71052	····82665	····96832	····13581
60	····60015	····61543	····65584	····72153	····81259	····92918	103107142	····23942
70	····70021	····71599	····75691	····82309	····91467	102603177	····17452	····34305
80	····80028	····81656	····85799	····92468	102101676	····13438	····27764	····44668
90	····90036	····91714	····95907	101602627	····11887	····23699	····38077	····55033
100	100100045	100601773	101106017	····12787	····22098	····33961	····48391	····65393
110	····10055	····11834	····16127	····22949	····32310	····44225	····58705	····75765
120	····20066	····21895	····26239	····33111	····42523	····54489	····69021	····86132
130	····30078	····31957	····36352	····43274	····52738	····64755	····79338	····96501
140	····40091	····42020	····46465	····53438	····62953	····75021	····89656	103706871
150	····50105	····52084	····56580	····63604	····73169	····85289	····99975	····17241
160	····60120	····62150	····66696	····73770	····83386	····95557	103210295	····27613
170	····70136	····72216	····76812	····83938	····93605	102705827	····20616	····37986
180	····80153	····82283	····86930	····94106	102203824	····16097	····30932	····48360
190	····90171	····92351	····97049	101704275	····14045	····26369	····41261	····58734
200	100200190	100702420	101207168	····14446	····24266	····36642	····51585	····69110
210	····10210	····12491	····17289	····24617	····34488	····46915	····61910	[illegible]
220	····20231	····22562	····27411	····34790	····44712	····57190	····72237	····89865
230	····30253	····32634	····37533	····44963	····54936	····67466	····82564	103800244
240	····40276	····42707	····47657	····55138	····65162	····77742	····92892	····10624
250	····50300	····52782	····57782	····65313	····75388	····88020	103303221	····21005
260	····60325	····62857	····67908	····75490	····85616	····98299	····13552	····31387
270	····70351	····72933	····78035	····85667	····95845	102508579	····23883	····41770
280	····80378	····83011	····88162	····95846	102306074	····18860	····34216	····52155
290	····90406	····93189	····98291	101806025	····16305	····29142	····44549	····62540
300	100300435	100803168	101308421	····16206	····26536	····39425	····54883	····72926
310	····10465	····13248	····18552	····26387	····36769	····49708	····65219	····83313
320	····20496	····23330	····28684	····36570	····47003	····59993	····75555	····93702
330	····30528	····33412	····38817	····46754	····57237	····70279	····85893	103904091
340	····40562	····43496	····48950	····56939	····67473	····80566	····96232	····14481
350	····50596	····53580	····59085	····67124	····77710	····90855	103406571	····24873
360	····60631	····63665	····69221	····77311	····87947	102901144	····16912	····35265
370	····70667	····73752	····79358	····87499	····98186	····11434	····27254	····45659
380	····80704	····83839	····89496	····97687	102408426	····21725	····37596	····56053
390	····90742	····93927	····99635	101907877	····18667	····32017	····47940	····66449
400	100400781	100904017	101409775	····18062	····28909	····42310	····58285	····76846
410	····10821	····14107	····19916	····28267	····39152	····52604	····69631	····87243
420	····20862	····24199	····30058	····38453	····49396	····62900	····78978	[illegible]
430	····30904	····34291	····40201	····48646	····59641	····73196	····89326	104008042
440	····40948	····44384	····50345	····58841	····69887	····83493	····99674	····18443
450	····50991	····54479	····60489	····69037	····80133	····93792	103510024	····28844
460	····61037	····64574	····70636	····79234	····90381	103004091	····20375	····39247
470	····71083	····74671	····80783	····89432	102500630	····14391	····30727	····49651
480	····81130	····84768	····90931	····99631	····10880	····24693	····41080	····60056
490	····91178	····94867	101501080	102009831	····21132	····34995	····51435	····70462
500	100501227	101004966	····11230	····20032	····31384	····45299	····61790	····80816

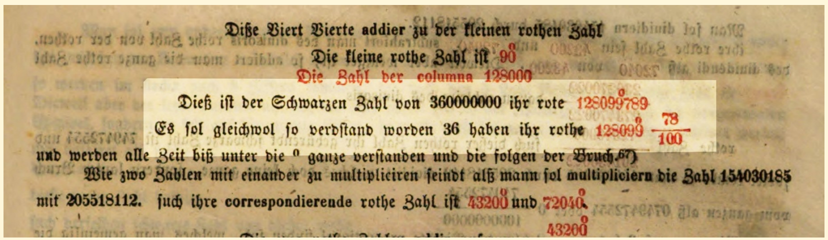
Bürgi erstellt auch eine Gebrauchsanleitung ...

Die Gebrauchsanleitung . . .

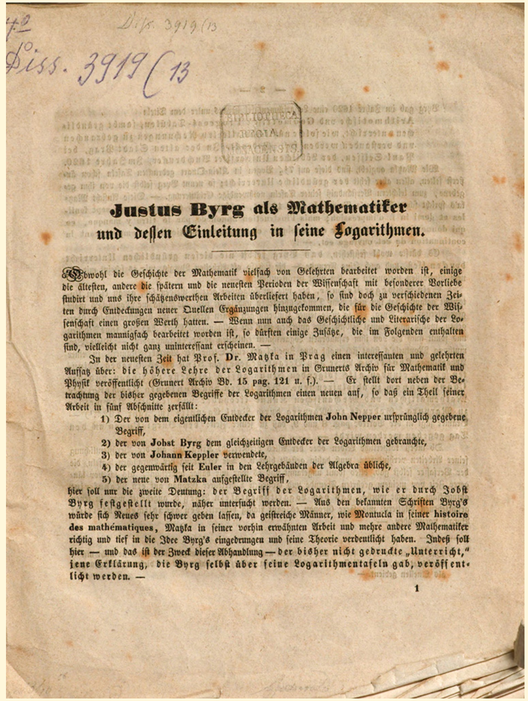
ist handgeschrieben und wird mit jeder Kopie der Tabelle separat geliefert. Erst 1865 wird die Gebrauchsanleitung gedruckt.

Bürgi ist der Miterfinder des Dezimalbruchsystems. Er schreibt eine kleine Null über eine Zahl, um den Übergang von ganzer Zahl zum Dezimalbruch – heute mit Dezimalpunkt markiert – anzugeben:

z.B. $23027\overset{\circ}{0}022$ bedeutet heute 230270.022



Diße Viert Vierte addier zu der kleinen rothen Zahl
Die kleine rothe Zahl ist $9\overset{\circ}{0}$
Die Zahl der columna 128000
Dieß ist der Schwarzen Zahl von 360000000 ihr rote $12809\overset{\circ}{9}789$
Es sol gleichwol so verdstand worden 36 haben ihr rothe $12809\overset{\circ}{9}\,\frac{78}{100}$
und werden alle Zeit biß unter die ⁰ ganze verstanden und die folgen der Bruch.67)
Wie zwo Zahlen mit einander zu multipliciren seindt alß mann sol multiplicieren die Zahl 154030185 mit 205518112. such ihre correspondierende rothe Zahl ist $4320\overset{\circ}{0}$ und $7204\overset{\circ}{0}$.
$4320\overset{\circ}{0}$



Justus Byrg als Mathematiker und dessen Einleitung in seine Logarithmen.

Obwohl die Geschichte der Mathematik vielfach von Gelehrten bearbeitet worden ist, einige die ältesten, andere die spätern und die neuesten Perioden der Wissenschaft mit besonderer Vorliebe studirt und uns ihre schätzenswerthen Arbeiten überliefert haben, so sind doch zu verschiedenen Zeiten durch Entdeckungen neuer Quellen Ergänzungen hinzugekommen, die für die Geschichte der Wissenschaft einen großen Werth hatten. — Wenn nun auch das Geschichtliche und Literarische der Logarithmen mannigfach bearbeitet worden ist, so dürften einige Zusätze, die im Folgenden enthalten sind, vielleicht nicht ganz uninteressant erscheinen. —

In der neuesten Zeit hat Prof. Dr. Matzka in Prag einen interessanten und gelehrten Aufsatz über: die höhere Lehre der Logarithmen in Grunerts Archiv für Mathematik und Physik veröffentlicht (Grunert Archiv Bd. 15 pag. 121 u. f.). — Er stellt dort neben der Betrachtung der bisher gegebenen Begriffe der Logarithmen einen neuen auf, so daß ein Theil seiner Arbeit in fünf Abschnitte zerfällt:

1) Der von dem eigentlichen Entdecker der Logarithmen John Nepper ursprünglich gegebene Begriff,
2) der von Jobst Byrg dem gleichzeitigen Entdecker der Logarithmen gebrauchte,
3) der von Johann Keppler verwendete,
4) der gegenwärtig seit Euler in den Lehrgebäuden der Algebra übliche,
5) der neue von Matzka aufgestellte Begriff,

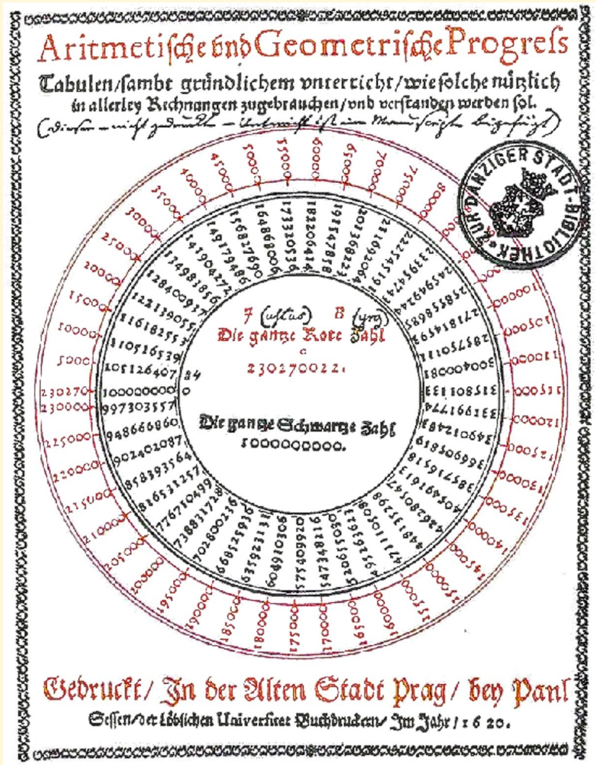
hier soll nur die zweite Deutung: der Begriff der Logarithmen, wie er durch Jobst Byrg festgestellt wurde, näher untersucht werden. — Aus den bekannten Schriften Byrg's würde sich Neues sehr schwer geben lassen, da geistreiche Männer, wie Montucla in seiner histoire des mathématiques, Matzka in seiner vorhin erwähnten Arbeit und mehre andere Mathematiker richtig und tief in die Idee Byrg's eingedrungen und seine Theorie verdeutlicht haben. Indeß soll hier — und das ist der Zweck dieser Abhandlung — der bisher nicht gedruckte „Unterricht," jene Erklärung, die Byrg selbst über seine Logarithmentafeln gab, veröffentlicht werden. —

1

Die Titelseite der Tabelle hat eine eindrucksvolle Grafik . . .

Titelseite der Tabelle

Exponenten n	500	1 000	...	23 000	230270022
Zahlen 1.0001^n	1.051	1.105	...	9.973	10.000



Leider trifft er zwei bedauerliche Entscheidungen ...

Zwei bedauerliche Entscheidungen

1. Bürgi zögert mit der Veröffentlichung der Tabelle

Bürgi entwickelt die Potenzentabelle wahrscheinlich **1596**, spätestens aber **1602**. Gedruckt wird die Tabelle aber erst **1620.**

John Napier (1550–1617) veröffentlicht **1614** eine Logarithmustabelle – also **6** Jahre vor dem Erscheinen der Potenzentabelle – und erwirbt damit dem Ruf, Erfinder des Logarithmus zu sein.

Zwei bedauerliche Entscheidungen

1. Bürgi zögert mit der Veröffentlichung der Tabelle

Bürgi entwickelt die Potenzentabelle wahrscheinlich **1596**, spätestens aber **1602**. Gedruckt wird die Tabelle aber erst **1620.**

John Napier (1550–1617) veröffentlicht **1614** eine Logarithmustabelle – also **6** Jahre vor dem Erscheinen der Potenzentabelle – und erwirbt damit dem Ruf, Erfinder des Logarithmus zu sein.

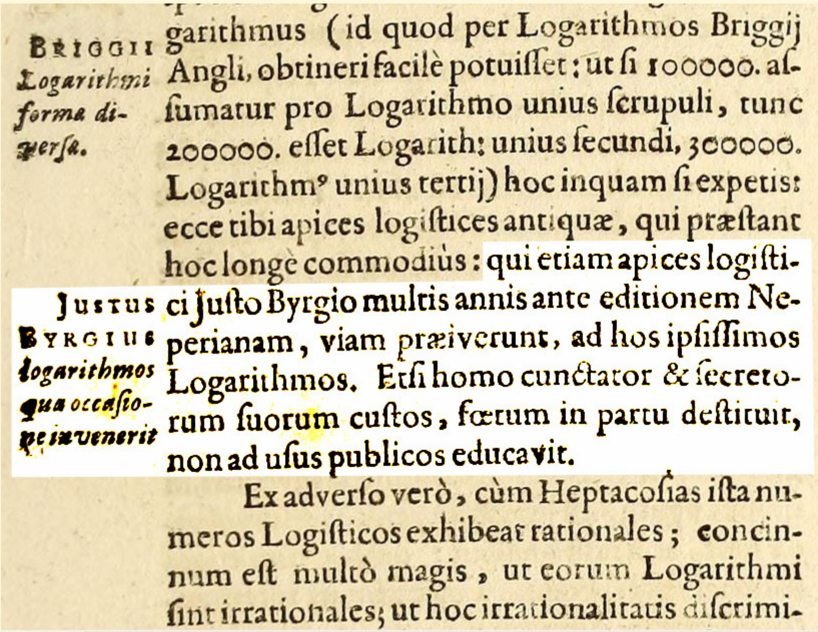
2. Bürgi entwickelt die Idee nicht weiter

Mit hoher Wahrscheinlichkeit hat Bürgi bestimmte Beziehungen gesehen, aber nicht weiter verfolgt.

Ein treffender Kommentar . . .

Keplers Kommentar

Johannes Kepler (1571–1630) erwähnt beide Aspekte auf Seite 11 in **Tabulae Rudolphinae** (1627).



Briggii Logarithmi forma diverſa.

garithmus (id quod per Logarithmos Briggij Angli, obtineri facilè potuiſſet: ut ſi 100000. aſſumatur pro Logarithmo unius ſcrupuli, tunc 200000. eſſet Logarith: unius ſecundi, 300000. Logarithmꝰ unius tertij) hoc inquam ſi expetis: ecce tibi apices logiſtices antiquæ, qui præſtant hoc longè commodiùs: qui etiam apices logiſtici Juſto Byrgio multis annis ante editionem Neperianam, viam præiverunt, ad hos ipſiſſimos Logarithmos. Etſi homo cunctator & ſecretorum ſuorum cuſtos, fœtum in partu deſtituit, non ad uſus publicos educavit.

Justus Byrgius logarithmos qua occaſione invenerit

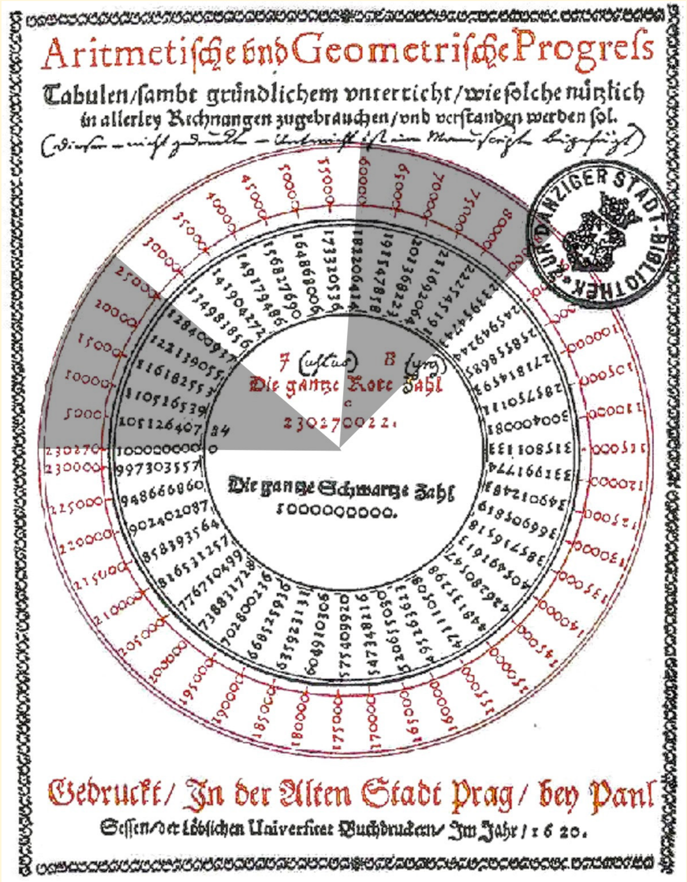
Ex adverſo verò, cùm Heptacoſias iſta numeros Logiſticos exhibeat rationales; concinnum eſt multò magis, ut eorum Logarithmi ſint irrationales; ut hoc irrationalitatis diſcrimi-

"Derartige logistische Hochzahlen [= Exponenten, die Kepler im Vorsatz erwähnt] haben Justus Byrgius viele Jahre vor dem Erscheinen von Napiers System zu genau diesen Logarithmen geführt. Aber er, ein zögerlicher Mensch und Hüter seiner Geheimnisse, hat das Kind bei der Geburt im Stich gelassen und nicht für allgemeinen Nutzen groß gezogen."

Eine Idee, die Bürgi sicher hatte, aber nicht verfolgte . . .

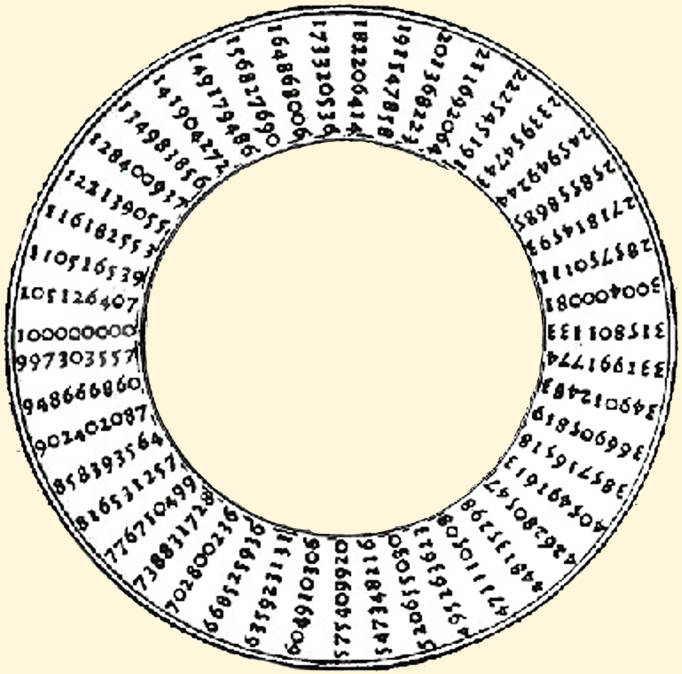
Bürgis Titelseite der Tabelle . . .

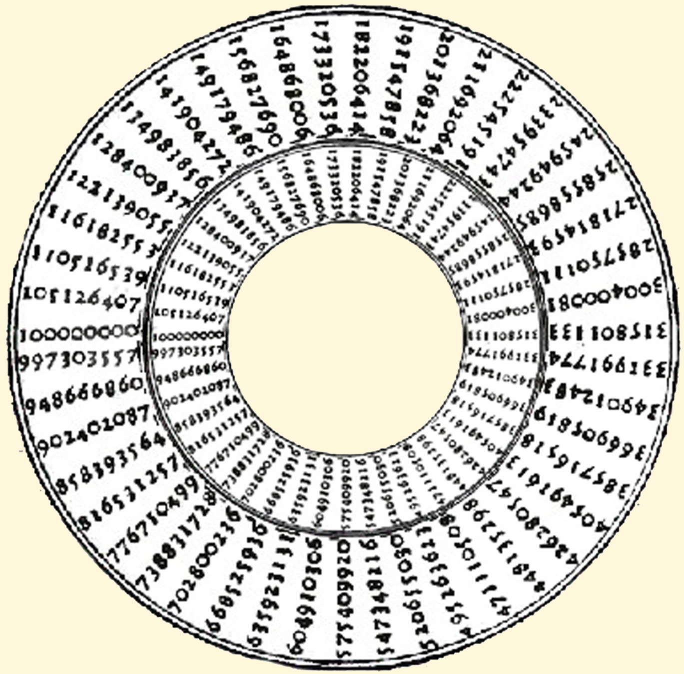
. . . ist der erste Schritt zur Rechenscheibe: Gleiche Winkel produzieren Multiplikation mit gleichen Faktoren.



Sicher sah Bürgi diese Beziehung . . .

. . . und dachte an Rechnen mit einer oder zwei Kopien des Zahlenrings.

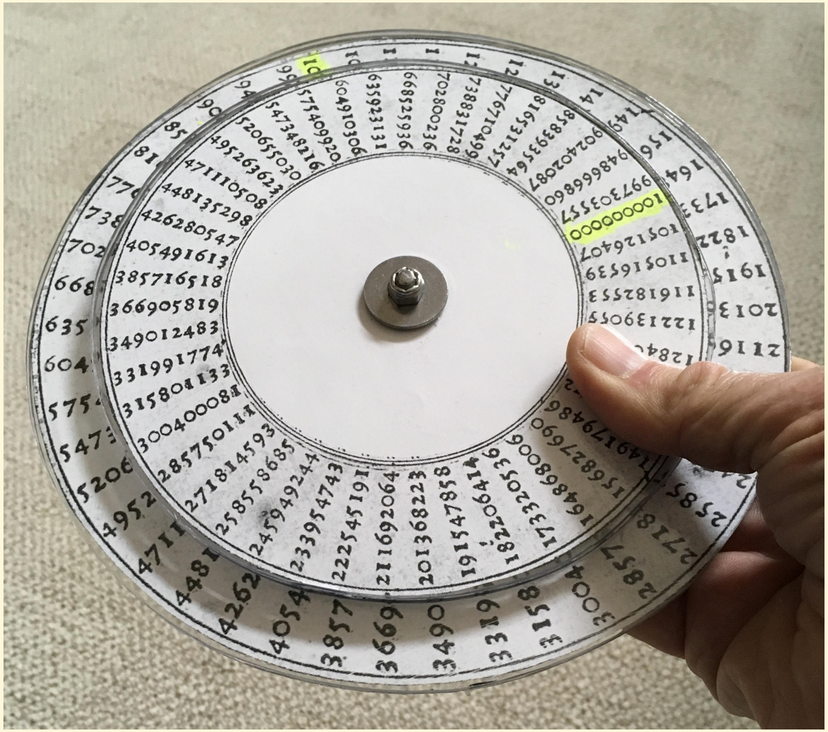




Wir sehen später eine Konstruktion für den Fall, bei dem nur eine Kopie benutzt wird. Bei zwei Kopien sieht es so aus . . .

Implementierung mit zwei Kopien

Nennen wir es **Bürgis Rechenscheibe.**

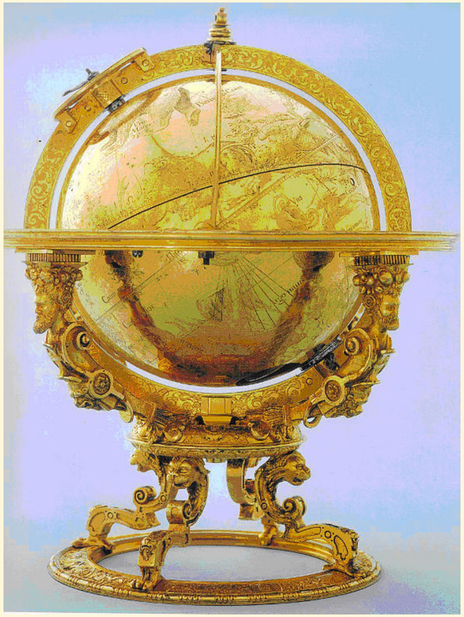


Wir können sicherlich annehmen . . .

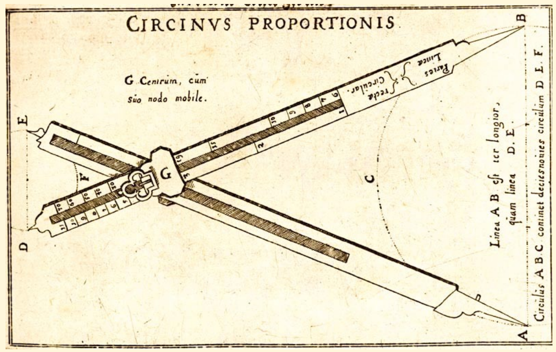
Wir können sicherlich annehmen . . .

. . . dass Bürgi irgend eine Konstruktion im Kopf hatte. Denn er war ein brillanter Uhrmacher, Astronom, Instrumentenbauer.

Himmelsglobus 1594



Proportionalzirkel 1582



Implementierung einer Rechenscheibe . . .

Die Implementierung einer Rechenscheibe . . .

. . . ist einfach, wenn man Bürgis Potenzentabelle benutzt.

Wenn man die Genauigkeit eines Rechenschiebers der 1960er Jahre erreichen will, muss man eine Skala mit 300-400 Dezimalzahlen erstellen. Das wäre für Bürgi, einem Miterfinder des Dezimalbruchsystems, kein Problem gewesen.

Für die Berechnung der Intervalle der Dezimalzahlen kann die Potenzentabelle ohne Interpolieren benutzt werden, da dies ausreichend genau ist.

Die Implementierung einer Rechenscheibe . . .

. . . ist einfach, wenn man Bürgis Potenzentabelle benutzt.

Wenn man die Genauigkeit eines Rechenschiebers der 1960er Jahre erreichen will, muss man eine Skala mit 300-400 Dezimalzahlen erstellen. Das wäre für Bürgi, einem Miterfinder des Dezimalbruchsystems, kein Problem gewesen.

Für die Berechnung der Intervalle der Dezimalzahlen kann die Potenzentabelle ohne Interpolieren benutzt werden, da dies ausreichend genau ist.

Berechnung der Tabelle braucht ein paar Stunden, und die Herstellung der Rechenscheibe 2-3 Tage. Die Rechenscheibe hat dann zwei Ringe mit Dezimalzahlen 1.0 bis 10.0.

Dann hätte er sicher noch weitere Ideen gehabt . . .

Zusätzliche Skalen

Er konnte beispielsweise auch eine lineare Skala der roten Zahlen von 0 bis $23\,027$ auf einem der Ringe anbringen.

Doch, halt, so hätte er gedacht, der letzte Wert $23\,027$ erzeugt doch die Komplikationen beim Rechnen. Warum nicht eine Skala, die diese Probleme vermeidet?

Zusätzliche Skalen

Er konnte beispielsweise auch eine lineare Skala der roten Zahlen von 0 bis $23\,027$ auf einem der Ringe anbringen.

Doch, halt, so hätte er gedacht, der letzte Wert $23\,027$ erzeugt doch die Komplikationen beim Rechnen. Warum nicht eine Skala, die diese Probleme vermeidet?

Da bietet sich ihm – dem Miterfinder des Dezimalbruchsystems – die lineare Skala 0.0 - 10.0 an! Und mit dieser Überlegung wäre er auf den Logarithmus mit Basis 10 gestoßen, und hätte sicher überlegt, wie er dafür eine exakte Tabelle bauen könnte.

Und so wäre er auch auf weitere Ideen gekommen, z.B. die, auf einem der Ringe die Daten seiner sehr exakten Tabelle für Sinuswerte unterzubringen.

Warum hat Bürgi das nicht verfolgt?

Warum hat Bürgi das nicht verfolgt?

Wir können natürlich nur raten, aber Folgendes liegt nahe:

Warum hat Bürgi das nicht verfolgt?

Wir können natürlich nur raten, aber Folgendes liegt nahe:

Bürgi hatte den Ehrgeiz, genaueste Rechenwerkzeuge, Uhren, Instrumente und Geräte zu bauen.

Eine Rechenscheibe war für ihn wohl uninteressant.

Warum hat Bürgi das nicht verfolgt?

Wir können natürlich nur raten, aber Folgendes liegt nahe:

Bürgi hatte den Ehrgeiz, genaueste Rechenwerkzeuge, Uhren, Instrumente und Geräte zu bauen.

Eine Rechenscheibe war für ihn wohl uninteressant.

Jedoch wären Wissenschaftler und Ingenieure hocherfreut gewesen, wenn man ihnen ein zwar etwas ungenaues aber sehr effizientes Rechenwerkzeug gebaut hätte.

Die Entwicklung von Rechenschieber, -scheibe, -walze vom 17. Jahrhundert bis zur Mitte des 20. Jahrhunderts hat das bewiesen.

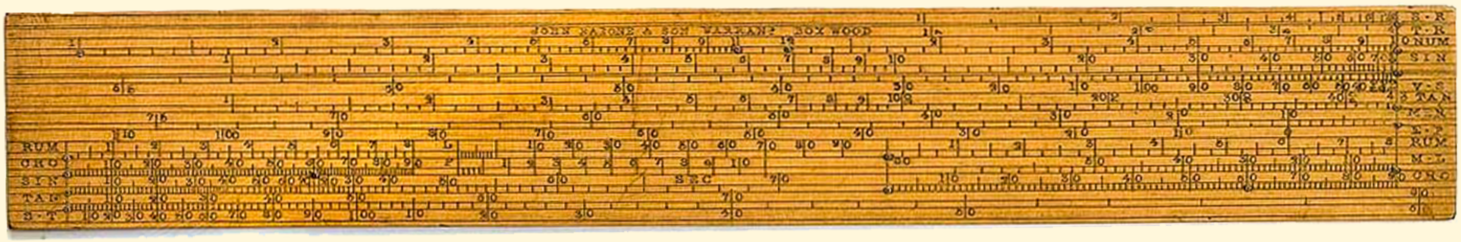
Stattdessen wird die Erfindung woanders gemacht . . .

Stattdessen . . .

. . . erfindet **Edmund Gunter (1581–1626)** die logarithmische Skala, die als **Gunter's Line** bekannt wird.

Die Skala hat er 1620 sicherlich von der Logarithmustabelle des Freundes und Kollegen **Henry Briggs (1561–1630)** abgeleitet.

Die Skala ist auf einem Lineal aufgetragen, so dass man Segmente mit einen Stechzirkel erfassen kann. Diese Segmente kann man dann addieren oder subtrahieren, und damit effectiv Zahlen multiplizieren und dividieren.

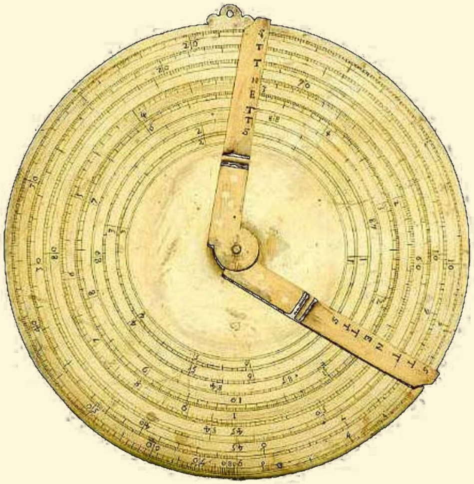


Zwei Jahre später wird das Verfahren vereinfacht durch den . . .

Rechenschieber

William Oughtred (1574–1660) legt 1622 zwei Gunter Lineale untereinander und erfindet so den Rechenschieber.

1632 überträgt er die Skala auf einen Kreis und erfindet so die Rechenscheibe.

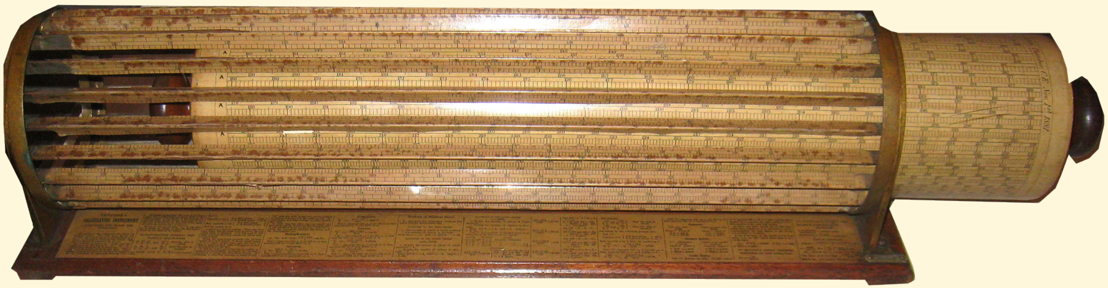


Darauf folgen 340 Jahre Weiterentwicklung . . .

Darauf 340 Jahre Weiterentwicklung . . .

. . . bis 1976. In dem Jahr brachte der elektronische Rechner die kommerzielle Produktion von Rechenschiebern, -scheiben und -walzen zum Stillstand.

Thacher Rechenwalze (ca. 1890); 61 cm lang, Skala 9 m lang



Russische Rechenuhr KL-1 (1917–1968)

Zurück zur Entwicklung des Logarithmus . . .

Bürgi erstellte sicherlich zuerst . . .

Bürgi erstellte sicherlich zuerst . . .

. . . folgende Tabelle, ehe er die endgültige Version berechnete:

y	$\log_{1.1}(y)$
1.000 000	0
1.100 000	1
1.210 000	2
. . .	
3.138 428	12
3.452 271	13
3.797 498	14
. . .	
8.954 302	23
9.849 733	24
10.000 000	24.153 approx.

Bürgi erstellte sicherlich zuerst . . .

. . . folgende Tabelle, ehe er die endgültige Version berechnete:

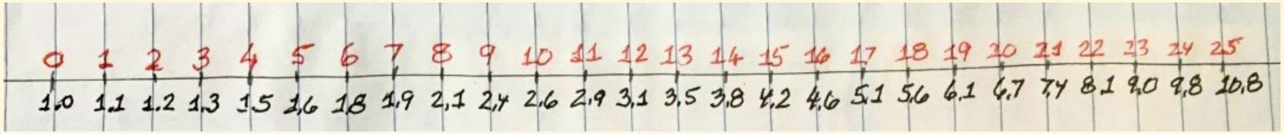
y	$\log_{1.1}(y)$
1.000 000	0
1.100 000	1
1.210 000	2
. . .	
3.138 428	12
3.452 271	13
3.797 498	14
. . .	
8.954 302	23
9.849 733	24
10.000 000	24.153 approx.

Rechenzeit: weniger als eine Stunde.

Er hätte dann folgendes machen können . . .

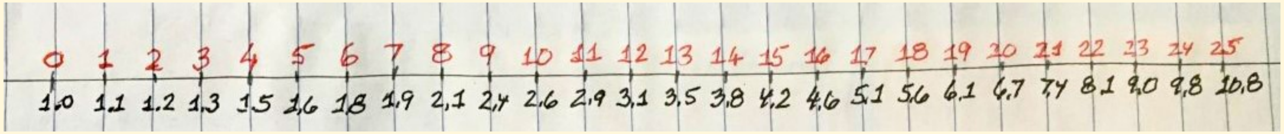
Er schreibt die roten Zahlen der Tabelle

in eine Reihe und setzt darunter die entsprechenden schwarzen Zahlen.

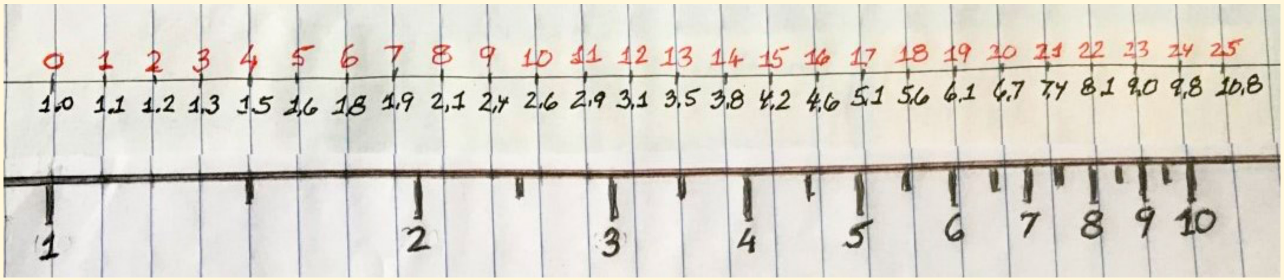


Er schreibt die roten Zahlen der Tabelle

in eine Reihe und setzt darunter die entsprechenden schwarzen Zahlen.

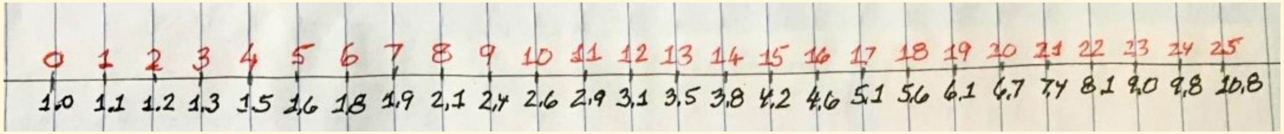


Er interpoliert die schwarzen Zahlen so dass er die Position für 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, etc. erhält.

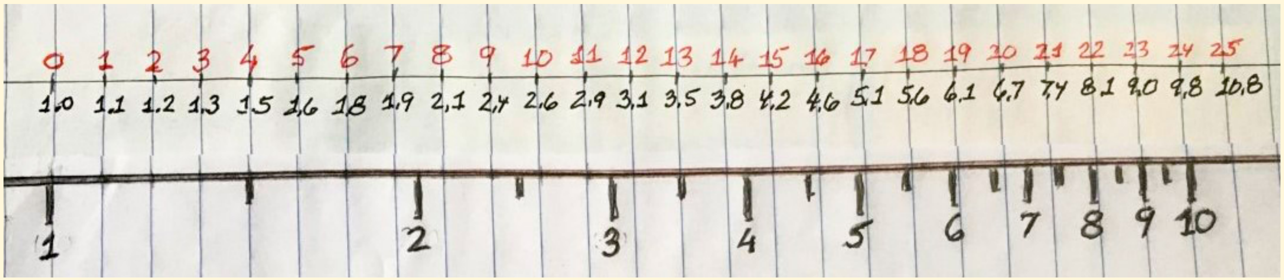


Er schreibt die roten Zahlen der Tabelle

in eine Reihe und setzt darunter die entsprechenden schwarzen Zahlen.

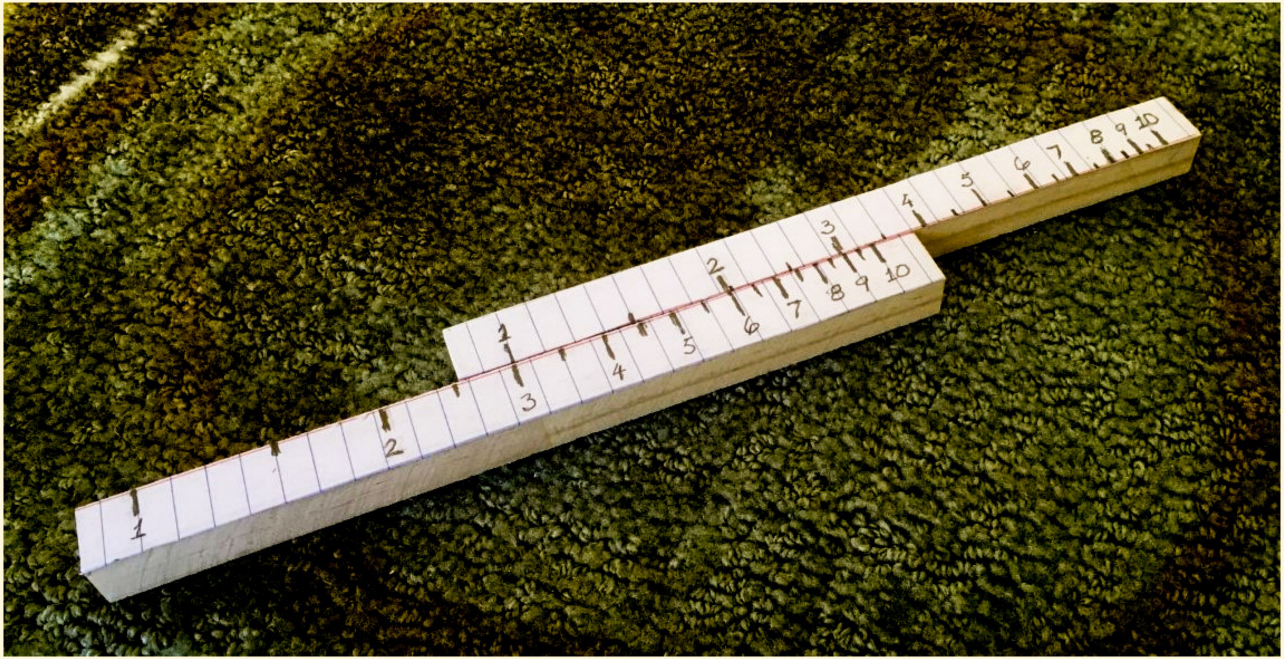


Er interpoliert die schwarzen Zahlen so dass er die Position für 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, etc. erhält.



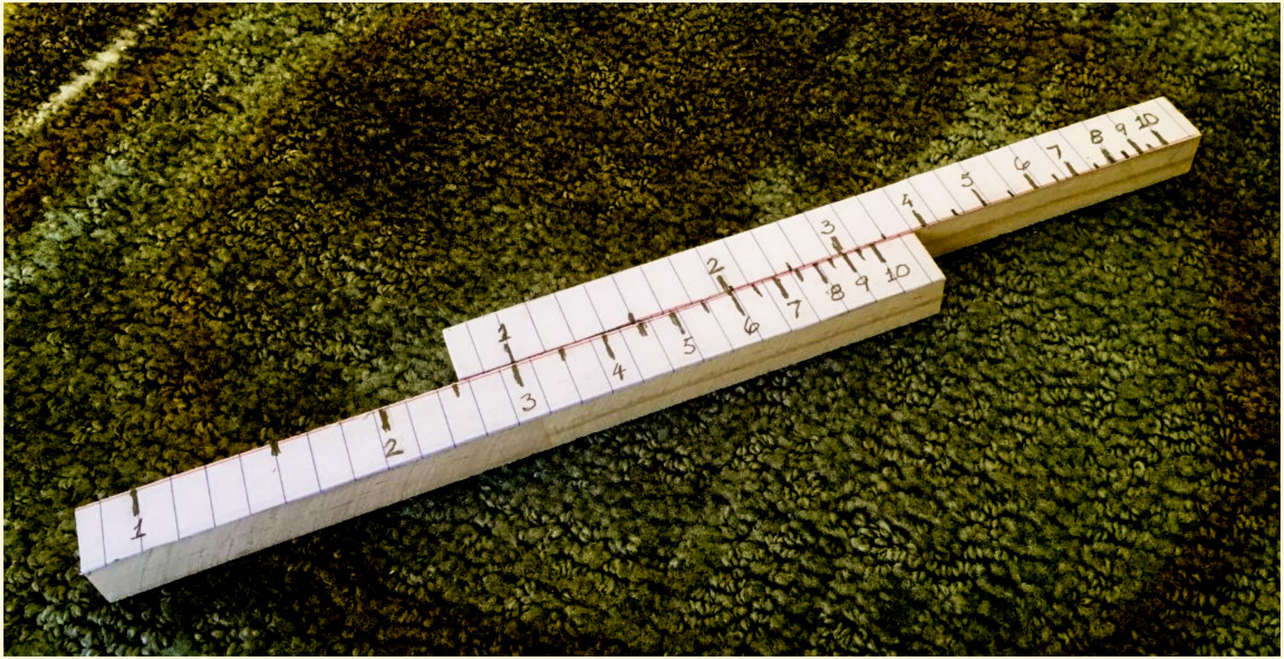
Er schneidet die roten und schwarzen Zahlen weg, macht eine Kopie, und hat dann den. . .

(Bürgi) Rechenschieber



Der Rechenschieber demonstriert den Fall $3 \cdot 2 = 6$. Gesamter Zeitaufwand: Unter zwei Stunden.

(Bürgi) Rechenschieber



Der Rechenschieber demonstriert den Fall $3 \cdot 2 = 6$. Gesamter Zeitaufwand: Unter zwei Stunden.

Zusammen fassend . . .

Zusammen fassend kann man sagen:

Zusammen fassend kann man sagen:

- **Bürgis Potenzentabelle beruht auf einer genial einfachen Konstruktion.**

Zusammen fassend kann man sagen:

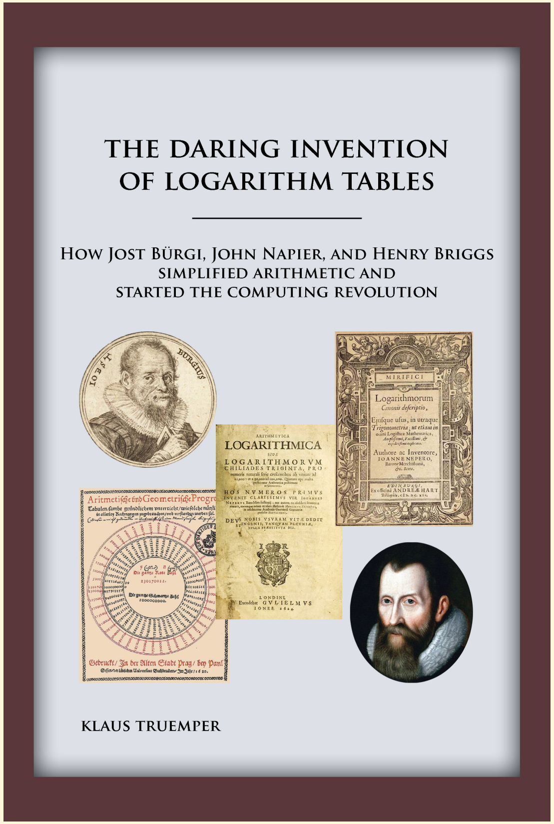
- **Bürgis Potenzentabelle beruht auf einer genial einfachen Konstruktion.**

- **Bürgi hatte sicher die Idee einer Art Rechenscheibe, hat sie aber leider nie verwendet. Hat auch nicht an einem Rechenschieber gearbeitet** Hätte er es getan, wäre er der Initiator für die jahrhundertelange Entwicklung von Rechenschieber, -scheibe und -walze gewesen.

Bücher

Vergleich mit Logarithmus Tabellen von John Napier und Henry Briggs . . .

Vergleich mit Logarithmus Tabellen von John Napier und Henry Briggs



Bildnachweis

"Ein wenig Mathematik":
Wikipedia Public Domain via Commons. https://en.wikipedia.org/wiki/Ren%C3%A9_Descartes#/media/File:Frans_Hals_-_Portret_van_Ren%C3%A9_Descartes.jpg, https://en.wikipedia.org/wiki/Discourse_on_the_Method#/media/File:Descartes_Discours_de_la_Methode.jpg.

"Eine Frage":
Wikipedia Public Domain via Commons. https://en.wikipedia.org/wiki/Jost_B%C3%BCrgi#/media/File:Jost_B%C3%BCrgi_Portr%C3%A4t.jpg.

"Archimedes: Sandzahl":
Wikipedia. Public Domain under US copyright code PD-old-100.
https://en.wikipedia.org/wiki/File:Domenico-Fetti_Archimedes_1620.jpg

"Eine berühmte Serie von Mathematikbüchern":

Wikipedia. Public Domain via Commons. https://en.wikipedia.org/wiki/Arithmetica#/media/File:Diophantus-cover.jpg.

"Die erste Potenzentabelle":
Stifel Portrait: Wikipedia Public Domain via Commons. https://en.wikipedia.org/wiki/Michael_Stifel#/media/File:Michael_Stifel.jpeg.
Potenzentabelle: M. Stifel, *Arithmetica Integra*, 1554, folio 249 verso. https://archive.org/details/bub_gb_fndPsRv08R0C/page/n519.

"Die Potenzentabelle erscheint 1620":
Lizenz Universität Graz. https://ub.uni-graz.at/de/neuigkeiten/detail/article/jost-buergi-aritmetische-und-geometrische-progresss/

"Die Gebrauchsanleitung . . . ":
H. Gieswald, *Justus Byrg als Mathematiker und dessen Einleitung in seine Logarithmen*, Danzig, 1856. Titel Seite und Seite 29. https://reader.digitale-sammlungen.de/de/fs3/object/display/bsb10979407_00001.html. Non-commercial use only.

"Titelseite der Tabelle":
Lizenz Toggenburger Museum, Lichtensteig, Switzerland.

"Keplers Kommentar":
J. Kepler, *Tabulae Rudolphinae*, 1627, S. 11. https://archive.org/details/tabulaerudolphin00kepl/page/n37.

"Bürgis Titelseite der Tabelle . . . ": Lizenz Toggenburger Museum, Lichtensteig, Switzerland, plus Grafik von K. Truemper.

"Sicher sah Bürgi diese Beziehung . . . ":
Die Ringe basieren auf Titelseite Lizenz Toggenburger Museum, Lichtensteig, Switzerland.

"Implementierung mit zwei Kopien":
Rechenscheibe Herstellung und Photo K. Truemper. Public domain CC0.

"Wir können sicherlich annehmen . . . ":
Himmelsglobus: Wikipedia CC BY-SA 3.0 via Commons. https:

//en.wikipedia.org/wiki/Jost_B%C3%BCrgi#/media/File:JostBurgi-MechanisedCelestialGlobe1594.jpg
Proportionalzirkel: Wikipedia. Public domain according to Austrian, German, and Swiss copyright law. https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Buergi_zirkelgross.jpg&filetimestamp=20060923235538&

"Stattdessen . . . ":
License Oughtred Society, webpage with photos of classic slide rules produced by Rod Lovett and Ted Hum. http://osgalleries.org/classic/page2.cgi.

"Rechenschieber":
Oughtred portrait: Wikipedia. Public Domain via Commons. https://en.wikipedia.org/wiki/William_Oughtred#/media/File:Wenceslas_Hollar_-_William_Oughtred.jpg.
Circular slide rule: License Oughtred Society, webpage by Rod Lovett and Ted Hum. http://osgalleries.org/classic/fulldetails.cgi?match=190.

"Darauf 340 Jahre Weiterentwicklung . . . ":

Thacher Rechenwalze: Wikipedia. Public domain. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Senator_John_Heinz_History_Center_-_IMG_7824.JPG.
Russische Rechenuhr KL-1: Wikipedia. CC BY-SA 3.0 Unported. Author Autopilot. https://en.wikipedia.org/wiki/Slide_rule#/media/File:Slide_rule_pocket_watch.jpg.

"Napiers Logarithmus":
Napier Portrait: Wikipedia. Public Domain via Commons. https://en.wikipedia.org/wiki/John_Napier#/media/File:John_Napier.jpg.
Mirifici logarithmorum: Wikipedia. Public Domain via Commons. https://en.wikipedia.org/wiki/John_Napier#/media/File:Logarithms_book_Napier.jpg.

"Napiers Modell" und folgende Seite:
Drawing: F. Cajori, *A History of Mathematics*, 1894. S. 162. Public domain. https://archive.org/details/ahistorymathema01cajogoog/page/n181.

"Briggs Logarithmustabelle":

H. Briggs, *Arithmetica Logarithmica*, 1624. Public domain. https://archive.org/details/arithmeticalogar00brig/page/n5.

Bücher, Artikel, Originaltexte

Bücher:

F. Staudacher, *Jost Bürgi, Kepler und der Kaiser*, NZZ Libro, 2018.

K. Clark, *Jost Bürgi's Aritmetische und Geometrische Progreß Tabulen (1620)*, Birkhäuser, 2015.

F. Cajori, *A History of Mathematical Notations*, Vol 1, Notations in Elementary Mathematics, The Open Court Publishing Company, 1928.

K. Truemper, *The Daring Invention of Logarithm Tables*, Leibniz Company, 2020.

Artikel:

J. Waldvogel, Jost Bürgi and the discovery of the logarithms, *Elem. Math.* 69 (2014) 89–117.

D. Roegel, A Reconstruction of Briggs' *Logarithmorum chilias prima* (1617), LOCOMAT project, 2011.

Originaltexte:

M. Stifel, *Arithmetica Integra*, 1544. https://archive.org/details/bub_gb_fndPsRv08R0C/page/n5/mode/2up

H. Gieswald, *Justus Byrg als Mathematiker und dessen Einleitung in seine Logarithmen*, Danzig, 1856, https://reader.digitale-sammlungen.de/de/fs3/object/display/bsb10979407_00001.html, no copyright – non-commercial use only.

J. Napier, *Mirifici Logarithmorum*, 1616, https://archive.org/details/mirificilogarit00napi/page/n7/mode/2up.

H. Briggs, *Arithmetica Logarithmorum*, 1624, https://archive.org/details/arithmeticalogar00brig/page/n5

J. Kepler, *Tabulae Rudolphinae*, 1627. https://archive.org/details/tabulaerudolphin00kepl/page/n1.
Originaltext zusammen mit deutscher Übersetzung: Herausgeber Jürgen Reichert, Verlag Königshausen & Neumann, 2014.