

Tilman Sauer: Die Prosthaphärese zwischen geometrischer Konstruktion und numerischem Algorithmus

Die Prosthaphaeresis ist eine Vorläufertechnik der Logarithmen. Sie ist eine geschickte Umformung des Produktes zweier Sinus-Werte in einen Ausdruck, der im Wesentlichen nur noch Additionen und Subtraktionen enthält. In etwas modernisierter, kompakter Schreibweise lässt sich die Prosthaphaeresis mittels folgender Formel ausdrücken:

$$\sin(a)\sin(b) = (1/2)[\sin(90^\circ - (a-b)) - \sin(90^\circ - (a+b))],$$

wobei a und b zwei positive Winkel sind, deren Summe kleiner als 90° ist. Für grössere Winkel ergeben sich etwas abgewandelte, aber prinzipiell ähnliche Beziehungen.

Verfügt man über trigonometrische Tabellen, welche einem Winkel seinen Sinuswert zuordnen, so kann man das Produkt auf der linken Seite in einen Ausdruck übersetzen, in dem zusätzlich zum Nachschlagen der Sinuswerte in einer Tabelle nur noch Additionen, Subtraktionen und eine harmlose Halbierung durchgeführt werden müssen. Dies bedeutete eine wesentliche Vereinfachung von besonders in astronomischen Rechnungen häufig auftretenden Produkten von Sinuswerten, wie sie auf der linken Seite der Gleichung stehen.

Allerdings wurde die Prosthaphaeresis zu ihrer Zeit nicht in der Form der obigen Gleichung geschrieben, sondern entweder als in Worte gefasste Rechenvorschrift oder in Form eines mehr oder weniger ausführlich erläuterten Diagramms. Die erste publizierte Fassung eines solchen Prosthaphaeresis-Diagramms findet sich in der 1588 veröffentlichten Schrift *Fundamentum Astronomicum* von Nicolaus Reimarus Ursus (1551-1600) (Fig.1). Wesentlich ausführlicher findet sich die Prosthaphaeresis dann in dem 1591 erschienenen Werk *Astrolabium* von Christopher Clavius (1538-1612) (Fig.2). In Worten ausgedrückt findet man die Beziehungen auch in François Viète's (1540-1603) *Variorum de rebus mathematicis responsorum liber VIII* von 1593. Jost Bürgi fügte zwei solcher Diagramme zusammen mit jeweils einem entsprechenden Zahlenbeispiel in sein eigenes, unveröffentlicht gebliebenes Werk *Fundamentum Astronomicum* ein (Fig.3). Weitere publizierte Versionen finden sich bei Jakob Christmann (1611), Longomontanus (1622), Joseph Solomon Delmedigo (1629), Georg Ludwig Frobenius (1634) und Emanuel Porto (1636)

Mit der Publikation der ersten Logarithmentafeln 1614 durch John Napier (1550-1617) und 1617 durch Henry Briggs (1561-1630) sowie Bürgis eigenen Antilogarithmen in seinen *Arithmetischen und Geometrischen Progresstabulen* von 1620, fiel die Methode der Prosthaphaeresis jedoch schnell in Vergessenheit, da die Logarithmen ein ungleich mächtigeres Instrument zur approximativen Berechnung aufwendiger Multiplikationen, Divisionen, Potenzierungen und Radizierungen boten.

Zusätzlich zu den publizierten Prosthaphaeresis-Diagrammen und -Darstellungen diskutierte die wissenschaftshistorische Literatur ausführlich auch unpubliziert überlieferte Traditionen der Prosthaphaeresis-Methode sowie seiner Vorläuferideen. Hierzu gehören neben Bürgis *Fundamentum* eine kurze Anleitung zum prosthaphaeretischen Rechnen, die den Namen Tycho Brahes (1546-1601) und die Jahreszahlen 1591 und 1595 trägt, aber wahrscheinlich von anderer Hand stammt und vielleicht auch früher zu datieren ist; weiter eine sehr ausführliche auf das Jahr 1598 datierte Handschrift von Melchior Jöstel (1559-1611), sowie eine Reihe von Rechnungen, in denen die prosthaphaeretische Methode konkret angewandt wurde. Eine besondere Rolle spielt in der historischen Diskussion ein Manuskript von Johannes Werner (1468-1522), das auf das Jahr 1514

datiert wird und direkt oder in seinen wesentlichen Ideen von Zeitgenossen Bürgis, insbesondere von Paul Wittich (c. 1546-1586) und Tycho Brahe rezipiert worden sein mag. Allerdings wurde Werners Manuskript erst 1907 in einer Edition von Axel Anton Björnbo publiziert und auch nur auf Grundlage einer Abschrift aus der Vatikanbibliothek eines offenbar mathematisch unkundigen Schreibers.

Eine genauere Analyse der Wernerschen Arbeit zeigt aber, dass der Ausgangspunkt für Werners Methode ein typisches Problem der sphärischen Geometrie war, nämlich die Bestimmung eines Winkels in einem sphärischen Dreieck, von dem drei Seiten gegeben sind. Durch Projektion auf einen Grosskreisschnitt der Sphäre gelingt es Werner, die hier nötigen Rechnungen in ganz ähnlicher Weise zu vereinfachen, indem auch hier Multiplikationen durch Additionen ersetzt werden. Es zeigt sich aber auch, dass Werners Ergebnis nur unter Zugrundelegung der prosthaphaeretischen Formel selbst in die Form der späteren prosthaphaeretischen Darstellungen gebracht werden kann.

Mit den beiden prosthaphäretischen Diagrammen und den dazugehörigen Zahlenbeispielen in seinem *Fundamentum Astronomicum* steht Jost Bürgi somit in einer Tradition der kreativen Weiterentwicklung numerischer Methoden in der Mathematik und in der Datenverarbeitung der beobachtenden Astronomie, mit dem Ziel die empirischen Beobachtungen immer genauer und präziser registrieren und verarbeiten zu können. Die Entwicklung der Prosthaphaeresis stellt dabei einen weiteren Aspekt der Herausbildung des mächtigen Instruments der Logarithmen dar, an der Bürgi auch noch mit seinen „roten und schwarzen Zahlen“ seiner Progress-Tabulen beigetragen hat. Mit den sehr genauen, vielstelligen dekadischen Logarithmentafeln, die dann im Laufe des 17. Jahrhundert erstellt wurden, hatte das wissenschaftliche Rechnen sein wichtigstes Hilfsmittel erhalten, das erst durch die Einführung der digitalen Computer in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts abgelöst werden sollte.

In dem Vortrag werde ich auf der Grundlage der umfangreichen wissenschaftshistorischen Literatur zu dem Thema Bürgis Beitrag zur Entwicklung der Prosthaphaeresis diskutieren.

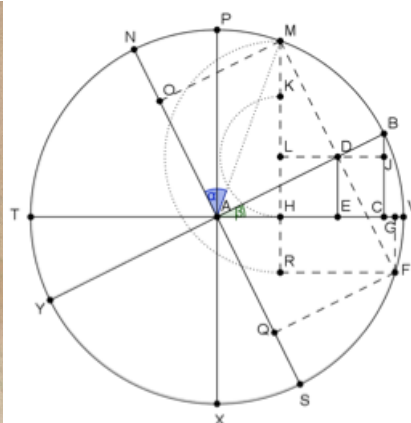
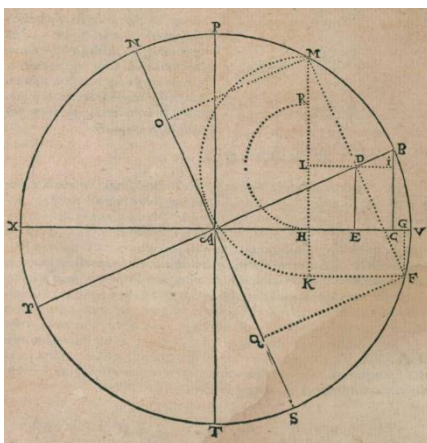


Fig. 1: Prosthaphaeresis-Diagramm aus Nicolaus Reimarus Ursus' *Fundamentum Astronomicum* (Strassburg 1588), p. 16v; und moderne Rekonstruktion mittels Geogebra von M.M.Capalbo, 2017.

