Über die frühe Geschichte der Logarithmen.

Detlef Gronau, Wien / Universität Graz

1. Arithmetische und Geometrische Progress Tabulen von Jost Bürgi (1552 – 1632).

Die "Progresstabulen"[1] von Jost Bürgi sind neben Napiers Tabellen[2] die ersten Hilfsmittel mit denen man auf Basis der Logarithmen verschiedenste numerische Rechnungen erledigen kann. Bürgis Tabellen sind nur in ganz wenigen Exemplaren erhalten. Von diesen sind meines Wissens die Exemplare aus Danzig und Graz die Einzigen, denen der im Titelblatt erwähnte *"gründliche Unterricht"* und zwar in Handschrift[3] beigefügt ist.

1.1. Vorrede an den Treuherzigen Leser.

In der Vorrede zum *gründlichen Unterricht* wendet sich Bürgi *"an den Treuherzigen" Leser*: „**Freundlicher lieber Leser, obwohl von Vortrefflichen Mathematicis mancherleÿ Tabulen Sind erdichtet und Calculirt wordten, um die Schwierigkeiten deß Multiplizierenß, dividierenß, und Radices Extrahierenß aufzuheben**", [...] so haben diese den Nachteil, dass für jede dieser Aufgaben eigene Tabellen erforderlich sind, was „**nicht allein verdrießlich sondern auch mühselig und beschwerlich**" ist. „**Derowegen Ich zu aller Zeit gesucht und gearbeitet habe, General Tabulen zu erfinden, mit welcher man die vorgenandten Sachen alle verrichten möchte, Betrachtendt derowegen die Aigenschafft und Correspondenz der 2 Progressen, als der Arithmetischen mit der Geometrischen, das was in der ist Multiplizieren ist in jener nur Addieren, und was ist in der dividieren, in Jehner Subtrahieren, und was in der ist Radicem quadratam Extrahieren, in Jener ist nur halbieren, Radicem Cubicam Extrahieren, nur in 3 dividieren, Radicem Zonsi in 4 dividieren, Sursolidam in 5. Und also fort in Andern quantitaten, so habe Ich nichts Nützliches erachtet, dan dise Tabulen** "

Hier beschreibt Bürgi schon genau die Eigenschaften der Logarithmen:
Einer **arithmetischen Reihe** $\boxed{n \cdot 10,\ n = 1, 2, \ldots}$, genannt die **"roten Zahlen"** setzt er eine **geometrische Reihe** $\boxed{q^n \cdot 10^8}$, die **"schwarzen Zahlen"**, gegenüber.

---

[1] *Arithmetische und Geometrische Progress Tabulen sambt* $\boxed{\textit{gründlichem unterricht}}$ */ wie solche nützlich in allerley Rechnungen zugebrauchen/und verstanden werden sol. [ ] Gedruckt/ In der Alten Stadt Prag / bey Paul Sessen / der löblichen Universitet Buchdruckern / Im Jahr 1620*

[2] *John Napier* (1550 – 1617), Baron von Merchiston, hat bekanntlich unabhängig von Bürgi Logarithmen-ähnliche Tabellen erstellt: *Mirifici logarithmorum canonis descriptio ejusque usus in utraque trigonometria etc. Edinburgh 1614.*

[3] Dieser "gründliche Unterricht" wurde von K. Clark transkribiert sowie ins Englische übersetzt und kommentiert. (*Clark, Kathleen: Jost Bürgi's Arithmatische und Geometrische Progreßtabulen (1620). Edition and Commentary.* Birkhäuser 2015.)

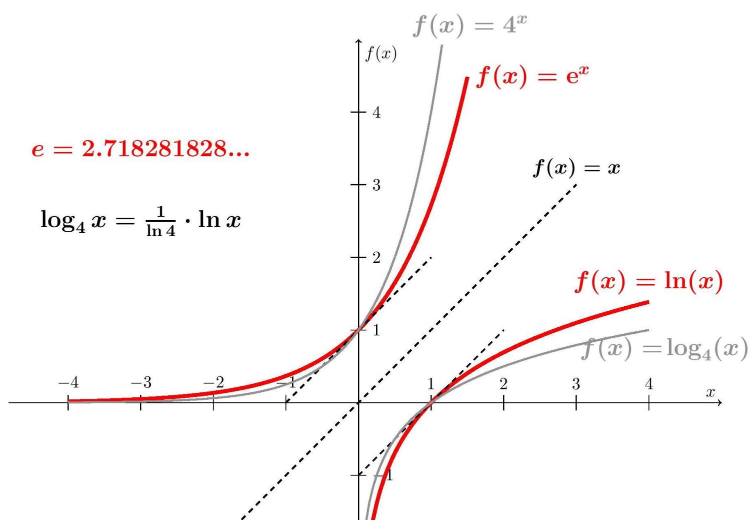
1.2. Die Logarithmen.

Die heute noch gültige Definition der Logarithmen gab *Leonhard Euler* (1707 – 1783) in seiner *Introductio in Analysis Infinitorum, 1748*:

Für eine reelle Zahl $a > 0$ *ist die Funktion* $f(x) := a^x$ *injektiv und besitzt daher eine* **Umkehrfunktion** *definiert für positive reelle Zahlen.*

Die Umkehrfunktion f^{-1} *von* f *ist definiert durch:* $f^{-1}(y) = x \Longleftrightarrow y = f(x)$. *Die Umkehrfunktion von* $f(x) = a^x$ *heißt* **Logarithmus zur Basis** a, *in Zeichen:* $\log_a$; *somit*

$$x = \log_a y \qquad \text{genau dann wenn} \qquad y = a^x.$$



Die Zahl e $= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2.718281828...$ *ist die* “Eulersche Zahl”. *Die Umkehrfunktion der sog.* “Exponentialfunktion” e^x *wird* “natürlicher Logarithmus” *genannt und mit* $\ln$ *bezeichnet, also* $\ln := \log_e$.

Die Zahl e ist von Euler so bestimmt worden, dass die Tangente an den Graph von $\ln$ *im Punkt* $x = 1$ *den Anstieg* 1 *hat.*

1.3. Die logarithmische Funktionalgleichung.

Es gilt somit:

$$x = \log_a y \quad \text{genau dann wenn} \quad y = a^x.$$

Weiters, mit $y := a^x$ und $w := a^u$, also $x = \log_a y$ und $u = \log_a w$ folgt aus

$$a^x \cdot a^u = a^{x+u}$$

die sogenannte “logarithmische Funktionalgleichung”

$$\boxed{\log_a(y \cdot w) = \log_a y + \log_a w.}$$

Aus dieser folgt leicht:

$\log_a(y \cdot y) = 2 \cdot \log_a y,\ \log_a(y \cdot y \cdot y) = 3 \cdot \log_a y, \ldots$ usw.

und somit auch für eine natürliche Zahl n:

$\log_a y^n = n \cdot \log_a y$ Potenzieren durch Multiplizieren.

$\log_a \sqrt[n]{y} = \frac{1}{n} \cdot \log_a y$ Wurzelziehen durch Dividieren.

1.4. Bürgis Progress Tabulen.

Bürgi erkannte genau die logarithmischen Eigenschaften seiner **roten Zahlen** wie in seinem *gründlichen Unterricht* ausführlich dargestellt wird, und wendet sie an. Die Berechnungen mit Hilfe seiner Tabellen liefern Ergebnisse die bis auf 8 Dezimalstellen genau sind!

Wenn auch durch seine Tabellen nicht direkt in mathematischem Sinne eine Logarithmusfunktiom dargestellt wird, so repräsentieren sie doch die mathematische Idee der Logarithmen. Die durch Bürgis Progress Tabulen definierte Funktion $L_B(y)$ ist näherungsweise gleich dem natürlichen Logarithmus:

$$\boxed{L_B(y) \approx 10^5 \cdot \ln\left(\tfrac{y}{10^8}\right)}.$$

Leider blieben die Bürgischen Logarithmen zu seiner Zeit und auch bis ins 19. Jhdt. faktisch unbekannt. Paulus Guldin[4] besaß zwar ein Exemplar in seiner Bibliothek und Johannes Kepler (1571 – 1630) kannte wohl das Prinzip der Bürgischen Logarithmen, aber anscheinend nicht Bürgis Progress Tabulen. So schreibt er in den Rudolfinischen Tafeln (Ulm, 1627) über Napiers Logarithmen: *“Diese logistischen Apices waren es auch, die Jost Bürgi viele Jahre vor der Napierschen Publikation den Weg zu genau diesen Logarithmen gewiesen haben.”* Kepler fährt dann aber fort: *“Allerdings hat der Zauderer und Geheimtuer das neugeborene Kind verkommen lassen, statt es zum allgemeinen Nutzen groß zu ziehen.”*

2. Weitere Entwicklungen der Logarithmen.

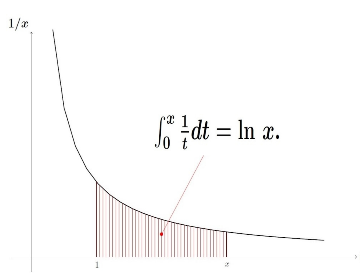
2.1. Briggs[5] publizierte 1617 Tabellen mit dem Logarithmus zur Basis 10 (*Briggscher Logarithmus*). Sie hatten den Vorteil, dass man die Umrechnung der Dezimalstellen und inbesondere die Reduktion der Zahlen auf den Tabellenbereich leichter durchführen kann.

2.2. Kepler leitete in seinen *Chilias logarithmorum*, Marburg 1624, aus der *logarithmischen Funktionalgleichung* konstruktiv eine Funktion ab, er nannte sie *“Mensura”*, die bis auf eine Zehnerpotenz gleich dem natürlichen Logarithmus ist. Faktisch ein *Existenz- und Eindeutigkeitssatz* für die “eingeschränkte” logarithmische Funktionalgleichung $f(x^2) = 2 \cdot f(x)$.

2.3. Hyperbolischer Logarithmus. Ab 1636 gelang *Pierre Fermat* (1601 – 1665) die Quadratur der höheren Hyperbeln und Parabeln der Form

$$y = ax^m,\ y = \tfrac{a}{x^m} \text{ und } y^n = ax^m,\ m, n \in \mathbb{N}.$$

Er hat, in unserer Notation, die Formel $\int_0^x y^k dy = \frac{x^{k+1}}{k+1}$, wobei k eine beliebige ganze oder auch gebrochene Zahl sein kann, entdeckt. Diese Formel versagt jedoch bei $k = -1$. Für diesen Fall fanden 1630 (veröffentlicht 1647) die Jesuitenpater *Gregorius a Santo Vincentio* (1584 – 1669) und *Alfonso Anton de Sarasa* (1618 – 1667) eine Lösung: *Wenn die Abszissen einer Hyperbel in geometrischer Progression wachsen, dann bilden die Flächen eine arithmetische Progression.* Dies führte zu den natürlichen Logarithmen als Flächeninhalt eines Hyperbelabschnittes:



Daher wurde der natürliche Logarithmus manchmal auch “hyperbolischer Logarithmus” genannt.

[4] Paulus Guldin, * 12.6.1577 in Mels im heutigen Kanton St. Gallen, † 3.11.1643 in Graz.

[5] Henry Briggs, (1561 – 1630), Professor für Geometrie in London und Oxford.

2.4. Logarithmische Reihe. *Isaac Newton* (1643 – 1727) und auch *Nicolaus Mercator* (eigentlich Kauffmann, 1620 – 1687) führten die sogenannte "logarithmische Reihe" ein:

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots .$$

2.5. Die Cauchyschen Funktionalgleichungen. Die logarithmische Funktionalgleichung $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$ wurde von A. L. Cauchy[6] systematisch behandelt. Sie ist eine der vier sogenannten *Cauchyschen Funktionalgleichungen*:

$$\begin{array}{rclcrcl} f(x+y) & = & f(x)+f(y) & \quad & f(x+y) & = & f(x)\cdot f(y) \\ f(x\cdot y) & = & f(x)+f(y) & \quad & f(x\cdot y) & = & f(x)\cdot f(y) \end{array}$$

die weiterhin in der Theorie der Funktionalgleichungen ausführlichst und in allen möglichen Verallgemeinerungen untersucht wurden. Der Keplersche Satz über die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung der eingeschränkten Funktionalgleichung

$$f(x^2) = 2 \cdot f(x), \quad f \text{ differenzierbar in } x = 1,$$

ist erst im 20. Jahrhundert von verschiedenen Autoren wiederentdeckt worden.

2.6. Logarithmentafeln. An weiteren Logarithmentafeln seien noch die folgenden erwähnt:
2.6.1. Arithmetica logarithmica von *Adriaan Vlacq*, Gouda/NL, 1628. Diese 10-stelligen Logarithmentafeln sind eine Erweiterung der Briggschen dekadischen Tafeln, die Vlacq gemeinsam mit *Ezechiel de Decker* erstellt hat.
2.6.2. Thesaurus logarithmorum completus von *Vega*.[7] Diese "vollständige Sammlung größerer logarithmisch-trigonometrischer Tafeln, nach Adrian Vlack's Arithmetica logarithmica und Trigonometria artificialis, verbessert, neu geordnet und vermehrt von Georg Vega," Leipzig 1794 wurden in Neubearbeitung durch Bremiker mehrfach aufgelegt und bis in die 60-er Jahre verwendet, bis sie von elektronischen Taschenrechnern abgelöst wurden. Dies gilt ebenso für die verschiedensten
2.6.3. Tafeln für die Verwendung im Schulunterricht, wie etwa in Österreich "Fünfstellige Tafeln für den Mathematik-Unterricht" von Jelínek - Herold.
2.7. Rechenschieber. Es sei noch kurz erwähnt, dass das Prinzip der Rechenschieber auf den Eigenschaften der Logarithmusfunktionen basiert.

Was geblieben ist, das ist die Theorie der Logarithmen! Logarithmusfunktionen sind unverzichtbar in der reinen und angewandten Mathematik, in Physik, Informatik, Statistik, Wirtschaftswissenschaften u.a. .

Literatur: Gronau D.: *Wie die Logarithmen zu ihrem Namen kamen.* In: C. Binder (Hrsg.): Tagungsband des XIII. Österreichischen Symposions zur Geschichte der Mathematik. Österr. Ges. f. Wissenschaftsgeschichte. Wien 2016.

[6] Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857) in Cours d'analyse de L'École Polytechnique, Vol. 1, Analyse algébrique V, Paris 1821

[7] *Georg Freiherr von Vega* $(1756 - 1802)$, Major beim Kaiserl. königl. Bombardierkorps und Professor der Mathematik.