Jost Bürgi

400. Logarithmen-Jubiläumsjahr

Die geniale Erfindung der Potenztabelle

Klaus Truemper
University of Texas at Dallas

Ein wenig Mathematik

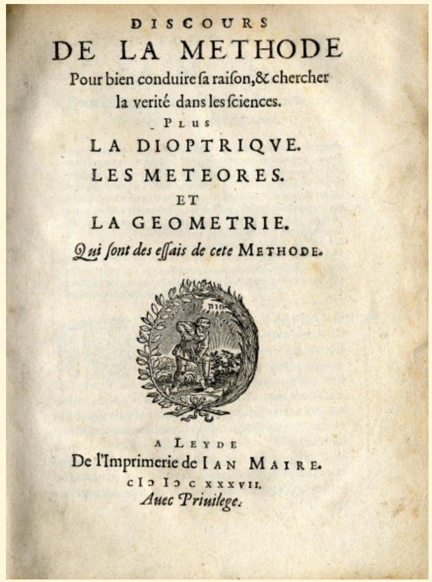
Gegeben:
$x = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots a$ (m mal der Faktor a)
$y = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots a$ (n mal)

Dann:
$x \cdot y = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots a$ ($m + n$ mal)

René Descartes (1596–1650) erfand 1637 die moderne Notation

$$x = a^{m}$$
$$y = a^{n}$$
$$x \cdot y = a^{m+n}$$

m, n, $m+n$ sind **Exponenten** von a und sind auch der **Logarithmus** von x, y, z mit **Basis** a.



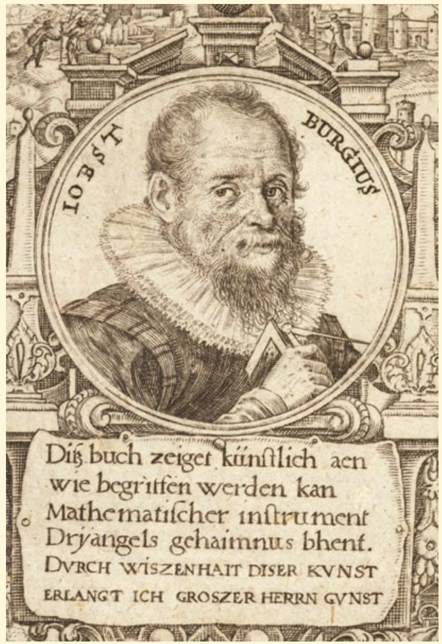
DISCOURS
DE LA METHODE
Pour bien conduire ſa raiſon, & chercher
la verité dans les ſciences.
PLUS
LA DIOPTRIQVE.
LES METEORES.
ET
LA GEOMETRIE.
Qui ſont des eſſais de cete METHODE.

A LEYDE
De l'Imprimerie de IAN MAIRE.
CIϽ IϽ C XXXVII.
Auec Priuilege.

Eine Frage

Zeitraubende **Multiplikation** $x \cdot y$ kann also durch einfache **Addition** $m + n$ ersetzt werden.

Ebenso kann **Division** x/y auf **Subtraktion** $m - n$ reduziert werden, sowie **Potenzberechnung** auf **Multiplikation**, und **Wurzelziehen** auf **Division.**



Frage: Wieso hat **Jost Bürgi (1552–1632)** das als erster gegen 1600 für effizientes Rechnen ausgenutzt?

Die Antwort ist einfach . . .

Er war eben ein genialer Mathematiker.

Was stand ihm denn zur Verfügung?

Vorgeschichte des Exponenten

Die Griechen des Altertums definierten Zahlen mittels Buchstaben des Alphabets:

$$\mathbf{A} = \mathbf{1},\ \mathbf{B} = \mathbf{2},\ \mathbf{\Gamma} = \mathbf{3},\ \ldots$$

$$\mathbf{I} = \mathbf{10},\ \mathbf{K} = \mathbf{20},\ \mathbf{\Lambda} = \mathbf{30},\ \ldots$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{100},\ \mathbf{\Sigma} = \mathbf{200},\ \mathbf{T} = \mathbf{300},\ \ldots$$

$${}^{\mathbf{A}}\text{ϡ} = \mathbf{1\,000},\ {}^{\mathbf{B}}\text{ϡ} = \mathbf{2\,000},\ {}^{\mathbf{\Gamma}}\text{ϡ} = \mathbf{3\,000},\ \ldots$$

(ϡ ist der archaische Buchstabe Sampi)

Die größte Zahl, die mit einem Buchstaben dargestellt werden konnte . . .

$\mathbf{M} = \mathbf{10\,000}$ (1 Myriade)

Bedeutete damals wie heute noch "eine sehr große Menge".

Apollonius von Perga (240 – ca. 190 v. Chr.) definierte mit **M** und den ersten Buchstaben des Alphabets folgende Zahlen:

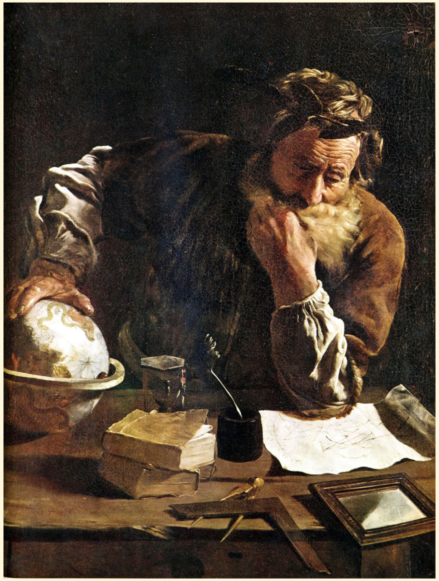
$$\overset{\alpha}{\mathbf{M}} = \mathbf{10\,000^1};\ \overset{\beta}{\mathbf{M}} = \mathbf{10\,000^2};\ \overset{\gamma}{\mathbf{M}} = \mathbf{10\,000^3};\ \overset{\delta}{\mathbf{M}} = \mathbf{10\,000^4};\ \ldots$$

Schon 400 Jahre vorher gab es eine viel größere Zahl . . .

Archimedes : Sandzahl

Archimedes (287(?)–212 v. Chr.) konstruierte eine riesige Zahl, mit der er die Behauptung widerlegte, dass die Sandkörner am Strande des Meeres nicht gezählt werden können.

Sandzahl = die Anzahl der Sandkörner, die das Universum füllen würden.



Archimedes bewies – in moderner Notation

Sandzahl $\leq \mathbf{10^{8\cdot 10^8} = 10^{800\,000\,000}}$

Für den Beweis erstellte er folgendes

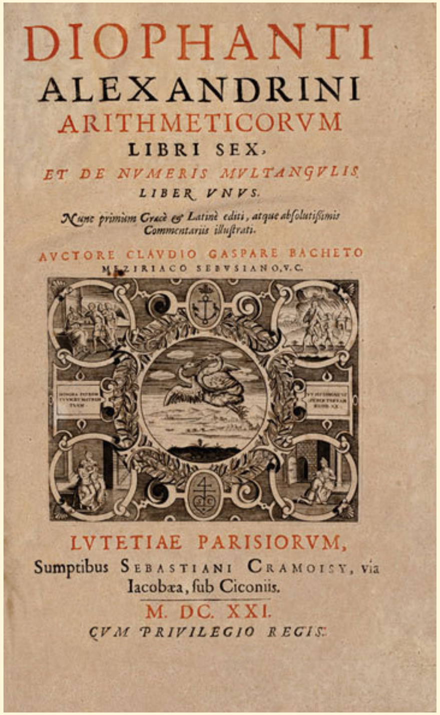
Theorem: $\mathbf{a}^{m} \cdot \mathbf{a}^{n} = \mathbf{a}^{m+n}$

Viele Jahrhunderte wurde das Resultat ignoriert . . .

Dreizehn berühmte Mathematikbücher

Diophantus von Alexandria (ca. 201-214 — ca. 284-298) schrieb dreizehn Bücher über die Lösung von Gleichungen.

Heute wird die Sammlung als ***Arithmetica*** bezeichnet.



Von den dreizehn Büchern sind drei verloren gegangen.

Einige der restlichen zehn Bücher – sechs griechische Manuscripte und vier arabische Übersetzungen – werden nach mehr als 1700 Jahren immer noch gedrucktl.

Arithmetica hat eigenartige Symbole für Produkte einer Variable . . .

Eigenartige Symbole

Diophantus benutzte für uns eigenartige Symbole, um Produkte einer Variable zu darzustellen. Was bedeutet z.B. folgende Gleichung, wobei " $\cdot$ " und " $=$ " moderne Notation sind?

$$\Delta^Y \cdot \Delta^Y\Delta = K^Y K$$

Die Lösung:

x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6
δ	Δ^Y	K^Y	$\Delta^Y\Delta$	ΔK^Y	$K^Y K$

Wir haben also:

$x^2 \cdot x^4 = x^6$
$\Delta^Y \cdot \Delta^Y\Delta = K^Y K$

Weitere Beispiele für Produkte einer Variable . . .

Weitere Beispiele

Nicolas Chuquet (ca. 1455 – ca. 1500):

12^0, 12^1, 12^2, . . . bedeutet 12, $12x$, $12x^2$, . . .

$12^{2.\tilde{m}}$ bedeutet $12x^{-1}$

Pietro Antonio Cataldi (1548–1626)

53 *via* 84 fà 407 bedeutet $5x^3 \cdot 8x^4 = 40x^7$

Adriamus Romanus (1561–1615)

$1(\overline{\underline{45}})$ bedeutet x^{45}

Bürgi hat eine Notation, die klar zwischen Koeffizienten und Exponenten differenziert . . .

Jost Bürgi (Dokument erstellt vor 1601. Es war 1923 in der Bücherei der Sternwarte in Pulkowa bei St. Petersburg. Heute?)

Römische Zahl ist Exponent einer Variablen.

$\overset{\textit{vi}}{4} \cdot \overset{\textit{iii}}{3} = \overset{\textit{vi}+\textit{iii}}{12} = \overset{\textit{ix}}{12}$ bedeutet $4x^6 \cdot 3x^3 = 12x^{6+3} = 12x^9$

Johannes Kepler (1571–1630) übernahm diese Notation.

Die Entwicklung der Exponenten für Zahlen verlief anders ...

Exponenten für Zahlen

Lange Zeit waren Exponenten für Zahlen unnötig, so dachte man.

Wenn z.B. $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ auftrat, berechnete man das Resultat und setzte 81 $(= 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3)$ ein.

Deshalb brauchte man keine Kurzform wie 3^4.

Die Idee eines Exponenten für Konstante taucht nach Archimedes erst 1544 wieder auf . . .

Die erste Potenztabelle

Im Jahr 1544 veröffentlichte **Michael Stifel (1487–1567)** in ***Arithmetica Integra*** eine eigenartige Tabelle.

infra o fingitur unitas cum numeris, id quod pulchre repræsentari uidetur in progreſſione numerorum naturali, dum ſeruit progreſſioni.

Sed oſtendenda eſt iſta ſpeculatio per exemplum.

-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64

Poſſet hic fere nouus liber integer ſcribi de mirabilibus numerorum, ſed oportet ut me hic ſubducã, & clauſis oculis abeã. Repetam uero unum ex ſuperioribus, ne fruſtra dicar fuiſſe in

Benutzung der Tabelle

−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64

Oben: **Exponenten** n (Stifels Definition)
Unten: **Zahlen** (moderne Notation: 2^n; **Basis** $= 2$)

Multiplikation $\frac{1}{4} \cdot 8 = 2$ wird auf **Addition** $-2 + 3 = 1$ reduziert.

$$\begin{array}{cccccc} \boxed{-2} & -1 & 0 & 1 & 2 & \boxed{3} \\ \hline \boxed{\mathbf{\tfrac{1}{4}}} & \frac{1}{2} & 1 & 2 & 4 & \boxed{\mathbf{8}} \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{cccccc} -2 & -1 & 0 & \boxed{1} & 2 & 3 \\ \hline \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & \boxed{\mathbf{2}} & 4 & 8 \end{array}$$

Problem: Die zweite Zeile enthält nicht alle Zahlen.
Wie kann das vermieden werden?

Bürgis Lösung

Vor 1600, also rund fünf Jahrzehnte nach Stifel, stellt Bürgi folgende Überlegungen an.

Ziel: Eine Potenztabelle, die alle Zahlen handhaben kann und die mit manuellem Rechnen relativ leicht erstellt werden kann.

Definition: Mit **Skalieren** meinen wir immer eventuell wiederholte Multiplikation mit 10 oder $1/10$.

Mit Skalieren reduzieren wir u. a. die großen Zahlen der Potenztabelle, in der Hoffnung, dass somit Bürgis Idee klarer wird.

Die Lösung besteht aus drei Schritten ...

Drei Schritte

1. Die Tabelle hat nur Dezimalzahlen im Bereich von 1.0 bis 10.0. Vor Anwendung der Tabelle werden alle außerhalb liegenden Zahlen mittels Skalieren in diesen Bereich gebracht.

2. Die Basis ist so gewählt, dass die Zahlen der Tabelle leicht berechnet werden können.

3. Die Tabelle hat genügend Zahlen im Bereich 1.0 bis 10.0, so dass die Exponenten fuer die fehlenden Zahlen durch Interpolieren genügend genau berechnet werden können.

Schritt 1: Die Basis . . .

Bürgis geniale Basis

Die **Basis** hat die Form $1.0\ldots01$, wobei die exakte Form noch entschieden werden muss.

Grund: Die Berechnung der Zahlen ist dann ganz einfach.

Beispiel: Gegeben sei $1.0001^{3500} = 1.41904272$

Die nächste Zahl $1.0001^{35001} = 1.0001 \cdot 1.41904272 =$

$$\begin{array}{rl} & 1.41904272 \\ + & \underline{0.000141904272} \\ & 1.41918462 \end{array}$$

Bürgi benötigt also nur Addition für die Berechnung der Tabelle.

Wie hat er die spezielle Form für $1.0\ldots01$ gewählt?

Bürgis Wahl für $1.0\ldots01$

Je kleiner $1.0\ldots01$, desto mehr Zahlen fallen in den Bereich 1.0 bis 10.0

Bürgi wollte die Basis so klein ansetzen, dass er gerade noch die Zahlen berechnen konnte.

Er konnte den Rechenaufwand einfach abschätzen.

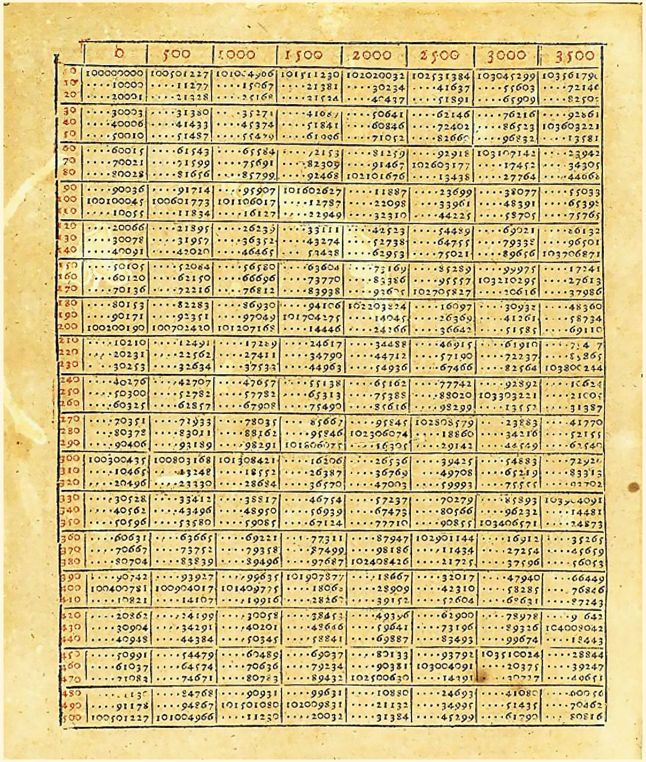
Für die Basis 1.1 fallen $N = 24$ Zahlen in den Bereich 1.0 bis 10.0. Eine einfache Überlegung: $1.1 \approx 1.01^{10} \quad 1.01 \approx 1.001^{10}$ etc.

Basis 1.01	$N < 250$		genau $N = 231$
1.001	$N < 2\,500$		$N = 2\,303$
1.0001	$N < 25\,000$	$\leftarrow$ Bürgis Wahl, mit	$N = 23\,027$
1.00001	$N < 250\,000$		$N = 230\,259$

Sehr genau: $10.000\,000\,00 = 1.0001^{23027.0022033}$ (Bürgi 23027.0022)

Die Potenztabelle erscheint 1620

Rote Exponenten n Schwarze Zahlen 1.0001^n



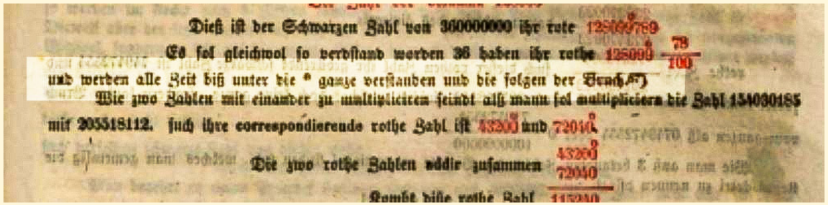
	0	500	1000	1500	2000	2500	3000	3500
0	100000000	100501227	101004966	101511230	102020032	102531384	103045299	10356179[illegible]
10	10000	11277	15067	21381	30234	41637	55603	72146
20	20001	21328	25168	31524	40437	51891	65909	....8250[illegible]
30	30003	31380	35271	41087	50641	62146	76216	92861
40	40006	41433	45374	51841	60846	72402	86523	103603221
50	50010	51487	55479	61996	71052	82669	96832	13581
60	60015	61543	65584	72153	81259	92918	103107142	23942
70	70021	71599	75691	82309	91467	102603177	17452	34305
80	80028	81656	85799	92468	102101676	13438	27764	44668
90	90036	91714	95907	101602627	11887	23699	38077	55033
100	100100045	100601773	101106017	12787	22098	33961	48391	65395
110	10055	11834	16127	22949	32310	44225	58705	75765
120	20066	21895	26239	33111	42523	54489	69021	86132
130	30078	31957	36352	43274	52738	64755	79338	96501
140	40091	42020	46465	53438	62953	75021	89656	103706871
150	50105	52084	56580	63604	73169	85289	99975	17241
160	60120	62150	66696	73770	83386	95557	103210295	27613
170	70136	72216	76812	83938	93605	102705827	20616	37986
180	80153	82283	86930	94106	102203824	16097	30932	48360
190	90171	92351	97049	101704275	14045	26369	41261	58734
200	100200190	100702420	101207168	14446	24266	36642	51585	69110
210	10210	12491	17289	24617	34488	46915	61910	....7[illegible]47
220	20231	22562	27411	34790	44712	57190	72237	89865
230	30253	32634	37533	44963	54936	67466	82564	103800244
240	40276	42707	47657	55138	65162	77742	92892	10624
250	50300	52782	57782	65313	75388	88020	103303221	21005
260	60325	62857	67908	75490	85616	98299	13552	31387
270	70351	72933	78035	85667	95845	102508579	23883	41770
280	80378	83011	88162	95846	102306074	18860	34216	52155
290	90406	93189	98291	101806075	16305	29142	44549	62540
300	100300435	100803168	101308421	16206	26536	39425	54883	....7292[illegible]
310	10465	13248	18552	26387	36769	49708	65219	83313
320	20496	23330	28684	36570	47003	59993	75555	93702
330	30528	33412	38817	46754	57237	70279	85893	103904091
340	40562	43496	48950	56939	67473	80566	96232	14481
350	50596	53580	59085	67124	77710	90855	103406571	24873
360	60631	63665	69221	77311	87947	102901144	16912	35265
370	70667	73752	79358	87499	98186	11434	27254	45659
380	80704	83839	89496	97687	102408426	21725	37596	56053
390	90742	93927	99635	101907877	18667	32017	47940	66449
400	100400781	100904017	101409775	18066	28909	42310	58285	76846
410	10821	14107	19916	28267	39152	52604	68631	87243
420	20862	24199	30058	38453	49396	62900	78978	....9 642
430	30904	34291	40201	48646	59641	73196	89326	104008042
440	40948	44384	50345	58841	69887	83493	99674	18443
450	50991	54479	60489	69037	80133	93792	103510024	28844
460	61037	64574	70636	79234	90381	103004091	20375	39247
470	71083	74671	80783	89432	102500630	14391	30727	49651
480	81130	84768	90931	99631	10880	24693	41080	60056
490	91178	94867	101501080	102009831	21132	34995	51435	70462
500	100501227	101004966	11230	20032	31384	45299	61790	80816

Bürgi erstellt auch eine Gebrauchsanleitung ...

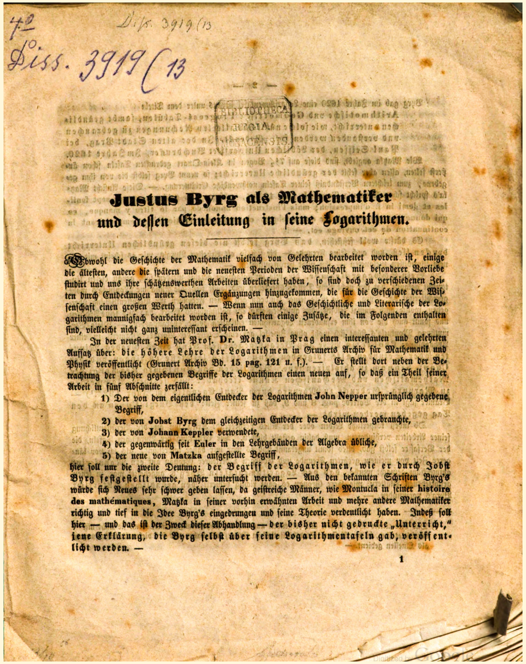
Die Gebrauchsanleitung . . .

ist handgeschrieben und wird mit jeder Kopie der Tabelle separat geliefert. Erst 1865 wird die Gebrauchsanleitung gedruckt.

Bürgi ist der Miterfinder des Dezimalbruchsystems. Er schreibt eine kleine Null über eine Zahl, um den Übergang von ganzer Zahl zum Dezimalbruch – heute mit Dezimalpunkt markiert – anzugeben: z.B. $23027\overset{\circ}{0}022$ bedeutet heute 230270.022



Dieß ist der Schwarzen Zahl von 360000000 ihr rote 128099789
Es sol gleichwol so verdstand worden 36 haben ihr rothe 125099 $\frac{78}{100}$
und werden alle Zeit biß unter die ° ganze verstanden und die folgen der Bruch.
Wie zwo Zahlen mit einander zu multipliciren seindt alß mann sol multipliciern die Zahl 154030185 mit 205518112. such ihre correspondierende rothe Zahl ist 43200 und 72040.
Die zwo rothe Zahlen addir zusammen 43200 72040
Kombt diße rothe Zahl 115240



4°
Diss. 3919(13

Justus Byrg als Mathematiker und dessen Einleitung in seine Logarithmen.

Obwohl die Geschichte der Mathematik vielfach von Gelehrten bearbeitet worden ist, einige die ältesten, andere die spätern und die neuesten Perioden der Wissenschaft mit besonderer Vorliebe studirt und uns ihre schätzenswerthen Arbeiten überliefert haben, so sind doch zu verschiedenen Zeiten durch Entdeckungen neuer Quellen Ergänzungen hinzugekommen, die für die Geschichte der Wissenschaft einen großen Werth hatten. — Wenn nun auch das Geschichtliche und Literarische der Logarithmen mannigfach bearbeitet worden ist, so dürften einige Zusätze, die im Folgenden enthalten sind, vielleicht nicht ganz uninteressant erscheinen. —

In der neuesten Zeit hat Prof. Dr. Matzka in Prag einen interessanten und gelehrten Aufsatz über: die höhere Lehre der Logarithmen in Grunerts Archiv für Mathematik und Physik veröffentlicht (Grunert Archiv Bd. 15 pag. 121 u. f.). — Er stellt dort neben der Betrachtung der bisher gegebenen Begriffe der Logarithmen einen neuen auf, so daß ein Theil seiner Arbeit in fünf Abschnitte zerfällt:

1) Der von dem eigentlichen Entdecker der Logarithmen John Nepper ursprünglich gegebene Begriff,
2) der von Jobst Byrg dem gleichzeitigen Entdecker der Logarithmen gebrauchte,
3) der von Johann Keppler verwendete,
4) der gegenwärtig seit Euler in den Lehrgebäuden der Algebra übliche,
5) der neue von Matzka aufgestellte Begriff,

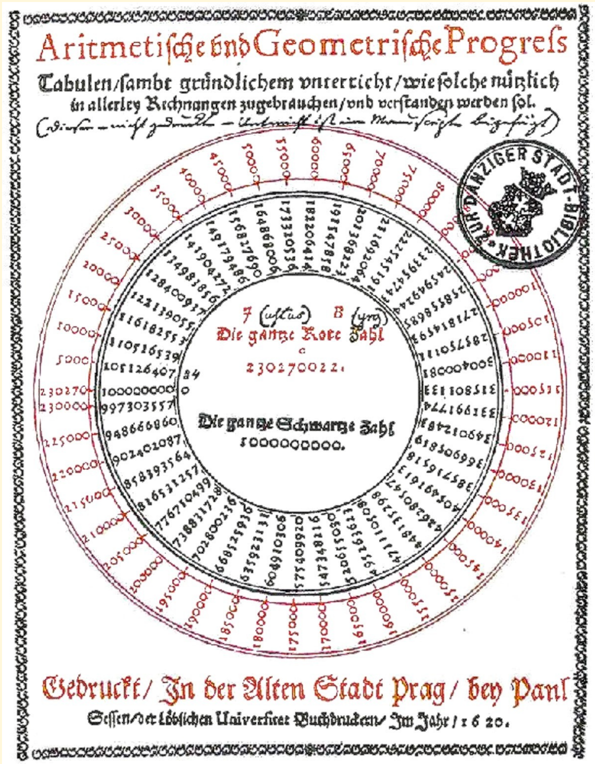
hier soll nur die zweite Deutung: der Begriff der Logarithmen, wie er durch Jobst Byrg festgestellt wurde, näher untersucht werden. — Aus den bekannten Schriften Byrg's würde sich Neues sehr schwer geben lassen, da geistreiche Männer, wie Montucla in seiner histoire des mathématiques, Matzka in seiner vorhin erwähnten Arbeit und mehre andere Mathematiker richtig und tief in die Idee Byrg's eingedrungen und seine Theorie verdeutlicht haben. Indeß soll hier — und das ist der Zweck dieser Abhandlung — der bisher nicht gedruckte „Unterricht," jene Erklärung, die Byrg selbst über seine Logarithmentafeln gab, veröffentlicht werden. —

1

Die Titelseite hat eine eindrucksvolle Grafik . . .

Titelseite der Tabelle

Exponenten n	500	1 000	...	23 000	230270022
Zahlen 1.0001^n	1.051	1.105	...	9.973	10.000



Leider trifft er zwei bedauerliche Entscheidungen ...

Zwei bedauerliche Entscheidungen

1. Bürgi verzögert die Veröffentlichung der Tabelle

Bürgi entwickelt die Potenztabelle wahrscheinlich **1596** und spätestens **1602**. Gedruckt wird die Tabelle aber erst **1620.**

John Napier (1550–1617) veröffentlicht **1614** eine Logarithmustabelle – also **6** Jahre vor dem Erscheinen der Potenztabelle – und erwirbt damit dem Ruf, Erfinder des Logarithmus zu sein.

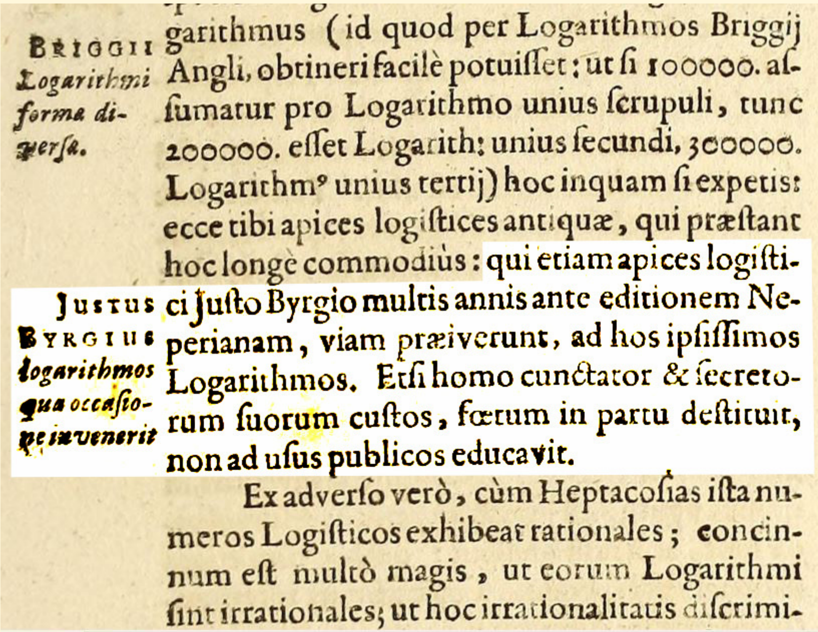
2. Bürgi entwickelt die Idee nicht weiter

Mit hoher Wahrscheinlichkeit hat Bürgi bestimmte Beziehungen gesehen, aber nicht verfolgt.

Ein treffender Kommentar . . .

Keplers Kommentar

Johannes Kepler (1571–1630) erwähnt beide Aspekte auf Seite 11 in **Tabulae Rudolphinae** (1627).


Briggii Logarithmi forma diverſa.

garithmus (id quod per Logarithmos Briggij Angli, obtineri facilè potuiſſet: ut ſi 100000. aſſumatur pro Logarithmo unius ſcrupuli, tunc 200000. eſſet Logarith: unius ſecundi, 300000. Logarithmꝰ unius tertij) hoc inquam ſi expetis: ecce tibi apices logiſtices antiquæ, qui præſtant hoc longè commodiùs: qui etiam apices logiſtici Juſto Byrgio multis annis ante editionem Neperianam, viam præiverunt, ad hos ipſiſſimos Logarithmos. Etſi homo cunctator & ſecretorum ſuorum cuſtos, fœtum in partu deſtituit, non ad uſus publicos educavit.

Justus Byrgius logarithmos qua occaſione invenerit

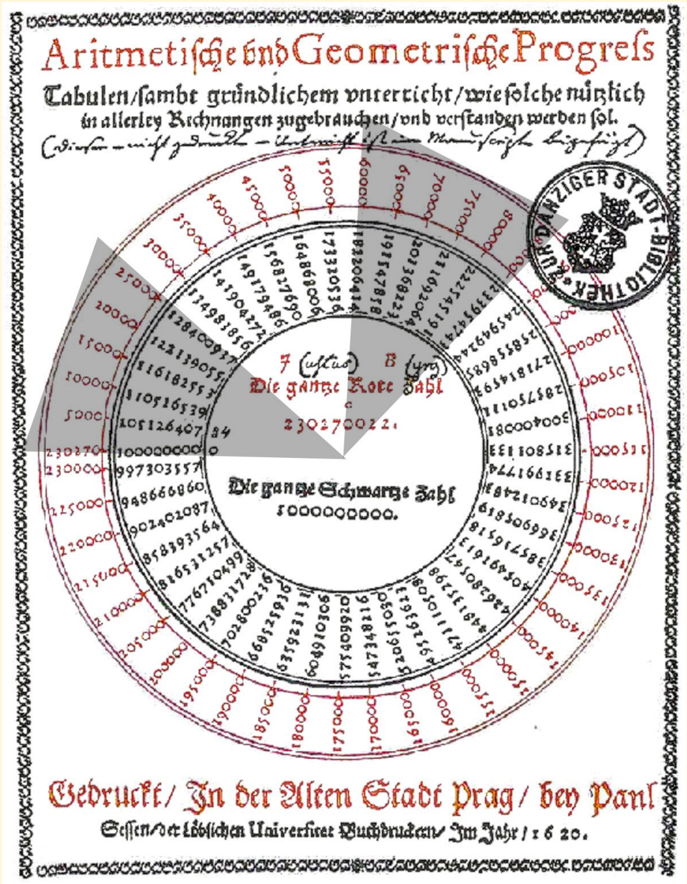
Ex adverſo verò, cùm Heptacoſias iſta numeros Logiſticos exhibeat rationales; concinnum eſt multò magis, ut eorum Logarithmi ſint irrationales; ut hoc irrationalitatis diſcrimi-

"Derartige logistische Hochzahlen [= Exponenten, die Kepler im Vorsatz erwähnt] haben Justus Byrgius viele Jahre vor dem Erscheinen von Napiers System zu genau diesen Logarithmen geführt. Aber er, ein zögerlicher Mensch und Hüter seiner Geheimnisse, hat das Kind bei der Geburt im Stich gelassen und nicht für allgemeinen Nutzen groß gezogen."

Eine Idee, die Bürgi sicher hatte, aber nicht verfolgte . . .

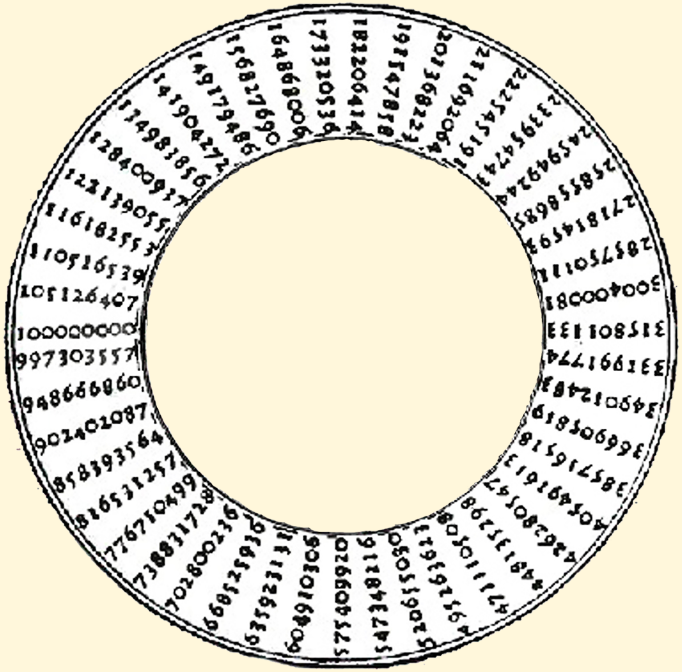
Bürgis Titelseite der Tabelle . . .

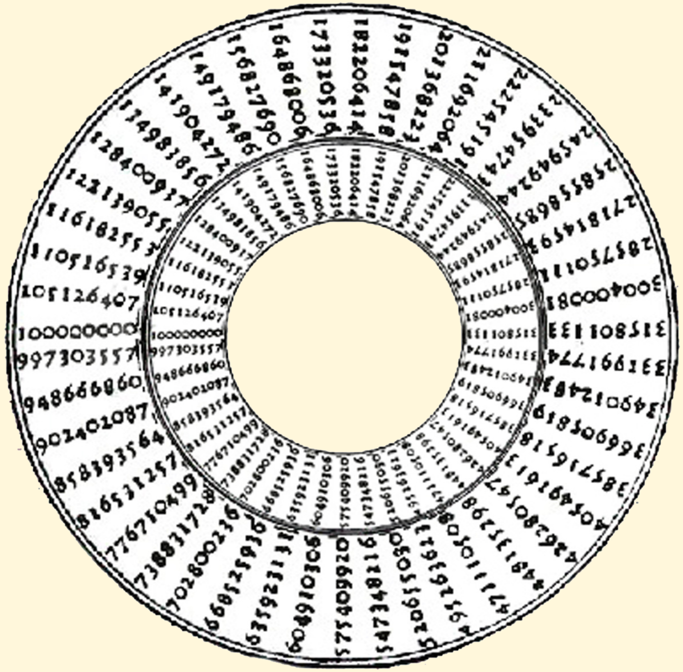
. . . ist der erste Schritt zur Rechenscheibe: Gleiche Winkel produzieren Multiplikation mit gleichen Faktoren.



Sicher sah Bürgi diese Beziehung . . .

. . . und dachte an Rechnen mit einer oder zwei Kopien des Zahlenringes.

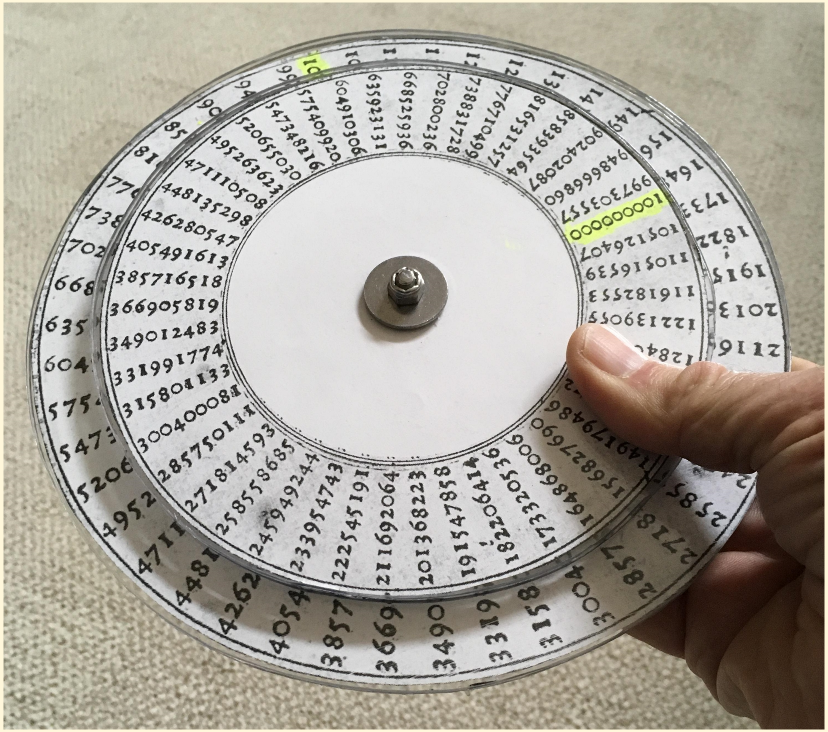




Wir sehen später eine Konstruktion für den Fall, wo nur eine Kopie benutzt wird. Bei zwei Kopien sieht es so aus . . .

Implementierung mit zwei Kopien

Nennen wir es **Bürgis Rechenscheibe.**

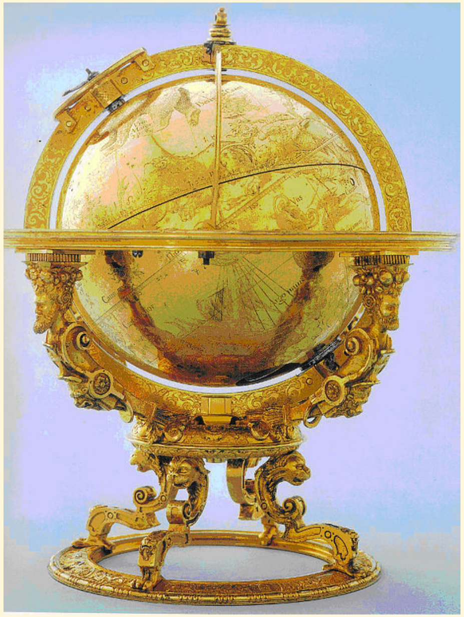


Wir können sicherlich annehmen . . .

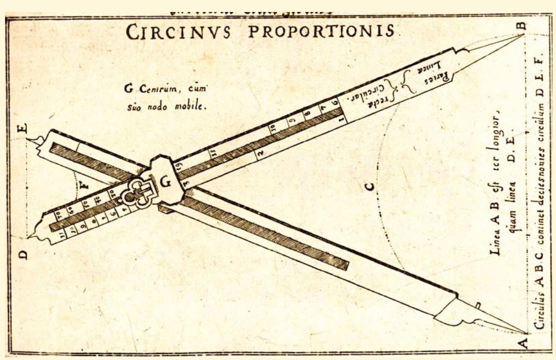
Wir können sicherlich annehmen ...

... dass Bürgi irgendeine Konstruktion im Kopf hatte. Denn er war ein brillanter Uhrmacher, Astronom, Instrumentenbauer.

Himmelsglobus 1594



Proportionalzirkel 1582



Implementierung einer Rechenscheibe ...

Implementierung einer Rechenscheibe . . .

. . . ist einfach, wenn man Bürgis Potenztabelle benutzt.

Wenn man die Genauigkeit eines Rechenschiebers der 1960er Jahre erreichen will, muss man im wesentlichen eine Basis-10 Logarithmustabelle mit 320 Dezimalzahlen erstellen. Wäre für Bürgi, einem Miterfinder des Dezimalbruchsystems, einfach gewesen.

Für jede Dezimalzahl wird die Potenztabelle dreimal benutzt. Der Rest is graphisches Skalieren mit Bürgis Proportionalzirkel.

Berechnung der Tabelle plus Herstellung der Rechenscheibe erfordern 1-2 Wochen. Die Rechenscheibe hat dann zwei Ringe mit Dezimalzahlen 1.0 bis 10.0.

Dann hätte er sicher noch weitere Ideen gehabt . . .

Zusätzliche Skalen

Er konnte doch auch eine lineare Skala der roten Zahlen von 0 bis 23027 auf einem der Ringe anbringen.

Doch, halt, so hätte er gedacht, der letzte Wert 23027 erzeugt doch all die Komplikationen beim Rechnen. Warum nicht eine Skala, die diese Probleme vermeidet?

Da bietet sich ihm – dem Miterfinder des Dezimalbruchsystems – die lineare Skala 0.0 - 10.0 an! Und mit dieser Überlegung wäre er auf den Logarithmus mit Basis 10 gestoßen, und hätte sicher überlegt, wie er dafür eine genaue Tabelle bauen könnte.

Und so wäre er auch auf weitere Ideen gekommen, z.B. die Daten seiner sehr exakten Tabelle für Sinuswerte auf einem der Ringe unterzubringen.

Warum hat Bürgi das nicht verfolgt?

Warum hat Bürgi das nicht verfolgt?

Wir können natürlich nur raten, aber Folgendes liegt nahe:

Bürgi hatte den Ehrgeiz, genaueste Rechenwerte, Tabellen, Uhren, Instrumente und Werkzeuge zu bauen.

Eine Rechenscheibe war wohl für ihn nicht interessant.

Jedoch wären Wissenschaftler und Ingenieure hocherfreut gewesen, wenn man ihnen ein zwar etwas ungenaues aber sehr effizientes Rechenwerkzeug gebaut hätte.

Die Entwicklung von Rechenschieber, -scheibe, -walze vom 17. Jahrhundert bis zur Mitte des 20. Jahrhunderts hat das bewiesen.

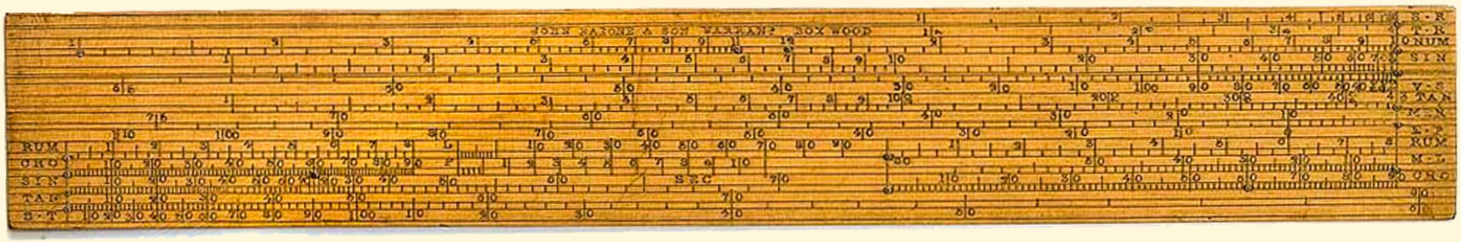
Stattdessen wird die Erfindung woanders gemacht . . .

Stattdessen . . .

. . . erfindet **Edmund Gunter (1581–1626)** die logarithmische Skala, die als **Gunter's Line** bekannt wird.

Die Skala hat er 1620 sicherlich von der Logarithmustabelle des Freundes und Kollegen **Henry Briggs (1561–1630)** abgeleitet.

Auf einem Lineal aufgetragen, kann man mit dem Stechzirkel Segmente der Skala erfassen. Diese Segmente kann man somit addieren oder subtrahieren, und damit effectiv Zahlen multiplizieren und dividieren.

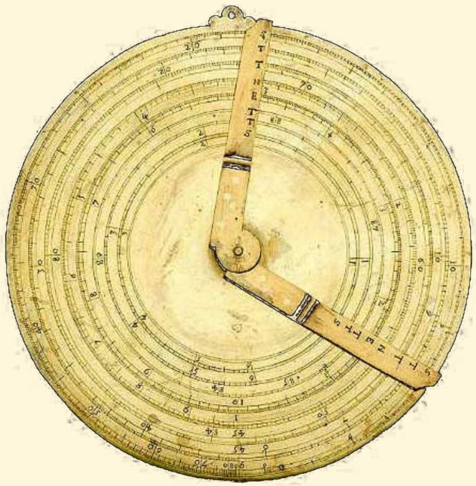


Zwei Jahre später wird das Verfahren vereinfacht durch den . . .

Rechenschieber

William Oughtred (1574–1660) legt 1622 zwei Gunter Lineale nebeneinander und erfindet so den Rechenschieber.

1632 überträgt er die Skala auf einen Kreis und erfindet so die Rechenscheibe.

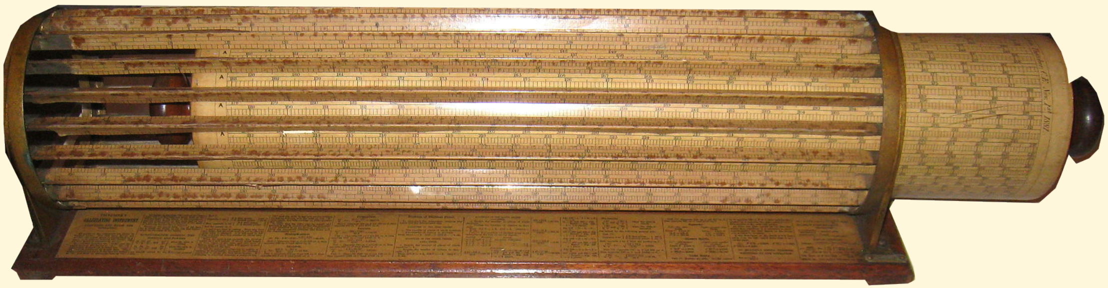


Darauf 340 Jahre Weiterentwicklung ...

Darauf 340 Jahre Weiterentwicklung . . .

. . . bis 1976. In dem Jahr brachte der elektronische Rechner die kommerzielle Produktion von Rechenschiebern, -scheiben und -walzen zum Stillstand.

Thacher Rechenwalze (ca. 1890); 61 cm lang, Skala 9 m lang



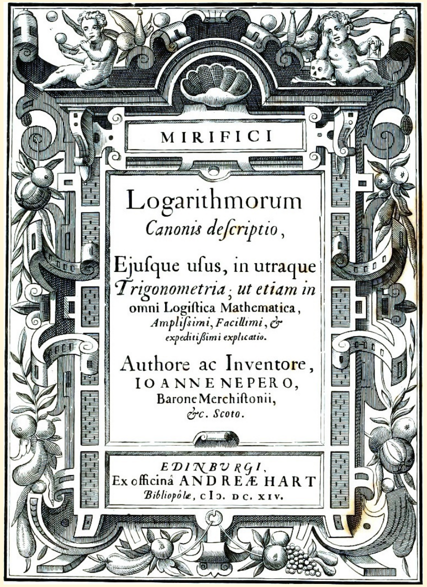
Russische Rechenuhr KL-1 (1917–1968)

Zurück zur Entwicklung des Logarithmus . . .

Napiers Logarithmus

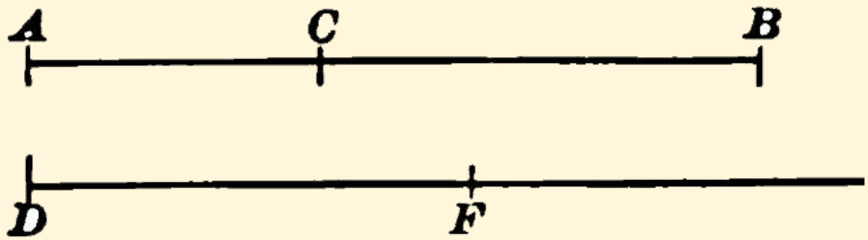
John Napier (1550–1617) entwickelte Methoden und Werkzeuge, die das Rechnen erleichterten und später Grundkonzepte für Rechenmaschinen lieferten.

Am wichtigsten ist seine Logarithmustabelle, die er unabhängig von Bürgi entwickelte. Gedruckt 1614, also 6 Jahre vor Bürgi.



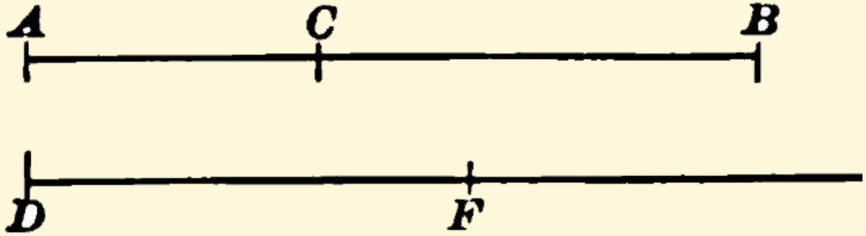
Napiers Modell

Napiers Ansatz is ganz anders als Bürgis.



Ein Punkt bewegt sich von $\boldsymbol{A}$ in Richtung $\boldsymbol{B}$. Zur gleichen Zeit started ein zweiter Punkt von $\boldsymbol{D}$. Der zweite Punkt bewegt sich mit konstanter Geschwindikeit. Der erste Punkt started mit derselben Geschwindigkeit, verlangsamt sich aber, je mehr er sich $\boldsymbol{B}$ nähert, wie folgt.

Wenn der erste Punkt bei $\boldsymbol{C}$ angekommen ist, dann ist die Geschwindigkeit die ursprüngliche Geschwindigkeit multipliziert mit dem Faktor (Länge ($\boldsymbol{C}$,$\boldsymbol{B}$))/(Länge ($\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$)). Deshalb ist die Geschwindigkeit des ersten Punktes Null wenn er $\boldsymbol{B}$ erreicht.



Nehmen wir an, dass der zweite Punkt sich in Position $\boldsymbol{F}$ befindet, wenn der erste Punkt bei $\boldsymbol{C}$ angekommen ist.

Napier definiert, dass die Länge ($\boldsymbol{D}$,$\boldsymbol{F}$) der **Logarithmus** der Länge ($\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{C}$) ist.

Napier wählt Länge ($\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$) $= 10^7$. Die Beziehung zum natürlichen Logarithmus $\ln$, mit Basis $e = 2.71828\ldots$, ist dann

$$\log_{\text{Napier}}(x) = 10^7(\ln 10^7 - \ln x)$$

Multiplikation sehen bei Bürgi und Napier verschieden aus ...

Bürgis und Napiers Multiplikation/Division

Multiplikation:

$\log_{\text{Bürgi}}(x \cdot y) = \log_{\text{Bürgi}}(x) + \log_{\text{Bürgi}}(y)$ (Regel der roten Zahlen)

$\log_{\text{Napier}}(x \cdot y) = \log_{\text{Napier}}(x) + \log_{\text{Napier}}(y) - \log_{\text{Napier}}(1)$

Division:

$\log_{\text{Bürgi}}(x/y) = \log_{\text{Bürgi}}(x) - \log_{\text{Bürgi}}(y)$ (Regel der roten Zahlen)

$\log_{\text{Napier}}(x/y) = \log_{\text{Napier}}(x) - \log_{\text{Napier}}(y) + \log_{\text{Napier}}(1)$

Vergleich des Rechenaufwands . . .

Rechenaufwand

Benutzung der Tabellen erfordert bei Bürgi und Napier etwa den gleichen Rechenaufwand.

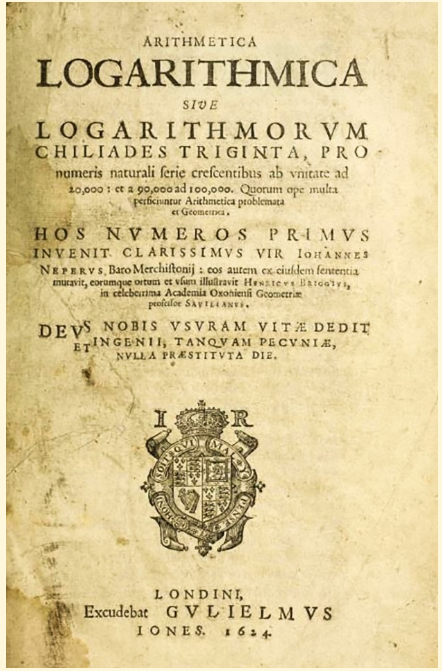
Zusätzlich muss Bürgi Logarithmuswerte mit der Bürgi-Konstanten 23027.0022 korrigieren, wenn errechnete Logarithmen außerhalb des Bereiches 0 bis 23027.0022 liegen.

Dahingegen korrigiert Napier die Resultate mit der Napier-Konstanten $\log_{\text{Napier}}(1) = 10^7 \cdot \ln 10^7 = 161\,180\,956.51$

Also ist der Rechenaufwand bei Bürgi und Napier in etwa gleich.

Ein Freund Napiers vermeidet derartige Korrekturen in einem neuen Ansatz . . .

Briggs' Logarithmustabelle


ARITHMETICA
LOGARITHMICA
SIVE
LOGARITHMORVM
CHILIADES TRIGINTA, PRO
numeris naturali ſerie creſcentibus ab vnitate ad
20,000 : et a 90,000 ad 100,000. Quorum ope multa
perficiuntur Arithmetica problemata
et Geometrica.
HOS NVMEROS PRIMVS
INVENIT CLARISSIMVS VIR IOHANNES
NEPERVS, Baro Merchiſtonij : eos autem ex eiuſdem ſententia
mutavit, eorumque ortum et vſum illuſtravit HENRICVS BRIGGIVS,
in celeberrima Academia Oxonienſi Geometriæ
profeſſor SAVILIANVS.
DEVS NOBIS VSVRAM VITÆ DEDIT
ET INGENII, TANQVAM PECVNIÆ,
NVLLA PRÆSTITVTA DIE.
I R
LONDINI,
Excudebat GVLIELMVS
IONES. 1624.

Henry Briggs (1561–1630) schlägt Napier 1616 vor, eine neue Logarithmustabelle aufzustellen. Napier stimmt sofort zu.

Briggs' Logarithmus hat Basis 10 und ist deshalb leicht im Dezimalsystem zu benutzen.

Briggs veröffentlich 1617 erste Rechenresultate: Die Logarithmen fuer die ganzen Zahlen 1–1000.

Sieben Jahre später, 1624, erscheint **Arithmetica Logarithmica**. Das Buch enthält Details der Rechenarbeit auf 88 Seiten und 14-stellige Logarithmen für die Zahlen 1–$20\,000$ und $90\,000$–$100\,000$ auf 289 Seiten.

Zusammenfassend . . .

Zusammenfassend kann man sagen . . .

- **Bürgis Potenztabelle beruht auf einer genial einfachen Konstruktion.**
- **Bürgi hatte sicher die Idee einer Art Rechenscheibe, hat sie aber leider nie ausgenutzt.** Hätte er es getan, hätte er die jahrhundertelange Entwicklung von Rechenschieber, -scheibe und -walze eingeleitet.
- **Bürgi und Napier haben unabhänging voneinander den Logarithmus erfunden.** Da Bürgi die Veröffentlichung seiner Tabelle um 20 Jahre verzögerte, wurde Napier lange Zeit als alleiniger Erfinder des Logarithmus angesehen.
- **Briggs' Logarithmustabelle ist einfacher als Bürgis anzuwenden.** Statt Addition/Subtraktion der Bürgi Konstante 23027.0022 wird die Größenordnung durch eine elementare Regel ermittelt: Die Ziffern vor dem Dezimalpunkt bestimmen die Größenordnung, die Ziffern danach die Zahl.

Bildnachweis

"Ein wenig Mathematik":
Wikipedia Public Domain via Commons. https://en.wikipedia.org/wiki/Ren%C3%A9_Descartes#/media/File:Frans_Hals_-_Portret_van_Ren%C3%A9_Descartes.jpg, https://en.wikipedia.org/wiki/Discourse_on_the_Method#/media/File:Descartes_Discours_de_la_Methode.jpg.

"Eine Frage":
Wikipedia Public Domain via Commons. https://en.wikipedia.org/wiki/Jost_B%C3%BCrgi#/media/File:Jost_B%C3%BCrgi_Portr%C3%A4t.jpg.

"Archimedes: Sandzahl":
Wikipedia. Public Domain under US copyright code PD-old-100.
https://en.wikipedia.org/wiki/File:Domenico-Fetti_Archimedes_1620.jpg

"Eine berühmte Serie von Mathematikbüchern":

Wikipedia. Public Domain via Commons. https://en.wikipedia.org/wiki/Arithmetica#/media/File:Diophantus-cover.jpg.

"Die erste Potenztabelle":
Stifel Portrait: Wikipedia Public Domain via Commons. https://en.wikipedia.org/wiki/Michael_Stifel#/media/File:Michael_Stifel.jpeg.
Potenztabelle: M. Stifel, *Arithmetica Integra*, 1554, folio 249 verso. https://archive.org/details/bub_gb_fndPsRv08R0C/page/n519.

"Die Potenztabelle erscheint 1620":
Lizenz Universität Graz. https://ub.uni-graz.at/de/neuigkeiten/detail/article/jost-buergi-aritmetische-und-geometrische-progresss/

"Die Gebrauchsanleitung . . . ":
H. Gieswald, *Justus Byrg als Mathematiker und dessen Einleitung in seine Logarithmen*, Danzig, 1856. Titel Seite und Seite 29. https://reader.digitale-sammlungen.de/de/fs3/object/display/bsb10979407_00001.html. Non-commercial use only.

"Titelseite der Tabelle":
Lizenz Toggenburger Museum, Lichtensteig, Switzerland.

"Keplers Kommentar":
J. Kepler, *Tabulae Rudolphinae*, 1627, S. 11. https://archive.org/details/tabulaerudolphin00kepl/page/n37.

"Bürgis Titelseite der Tabelle ...": Lizenz Toggenburger Museum, Lichtensteig, Switzerland, plus Grafik von K. Truemper.

"Sicher sah Bürgi diese Beziehung ...":
Die Ringe basieren auf Titelseite Lizenz Toggenburger Museum, Lichtensteig, Switzerland.

"Implementierung mit zwei Kopien":
Rechenscheibe Herstellung und Photo K. Truemper. Public domain CC0.

"Wir können sicherlich annehmen ...":
Himmelsglobus: Wikipedia CC BY-SA 3.0 via Commons. https:

//en.wikipedia.org/wiki/Jost_B%C3%BCrgi#/media/File:JostBurgi-MechanisedCelestialGlobe1594.jpg
Proportionalzirkel: Wikipedia. Public domain according to Austrian, German, and Swiss copyright law. https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:Buergi_zirkelgross.jpg&filetimestamp=20060923235538&

"Stattdessen . . . ":
License Oughtred Society, webpage with photos of classic slide rules produced by Rod Lovett and Ted Hum. http://osgalleries.org/classic/page2.cgi.

"Rechenschieber":
Oughtred portrait: Wikipedia. Public Domain via Commons. https://en.wikipedia.org/wiki/William_Oughtred#/media/File:Wenceslas_Hollar_-_William_Oughtred.jpg.
Circular slide rule: License Oughtred Society, webpage by Rod Lovett and Ted Hum. http://osgalleries.org/classic/fulldetails.cgi?match=190.

"Darauf 340 Jahre Weiterentwicklung . . . ":

Thacher Rechenwalze: Wikipedia. Public domain. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Senator_John_Heinz_History_Center_-_IMG_7824.JPG.
Russische Rechenuhr KL-1: Wikipedia. CC BY-SA 3.0 Unported. Author Autopilot. https://en.wikipedia.org/wiki/Slide_rule#/media/File:Slide_rule_pocket_watch.jpg.

"Napiers Logarithmus":
Napier Portrait: Wikipedia. Public Domain via Commons. https://en.wikipedia.org/wiki/John_Napier#/media/File:John_Napier.jpg.
Mirifici logarithmorum: Wikipedia. Public Domain via Commons. https://en.wikipedia.org/wiki/John_Napier#/media/File:Logarithms_book_Napier.jpg.

"Napiers Modell" und folgende Seite:
Drawing: F. Cajori, *A History of Mathematics*, 1894. S. 162. Public domain. https://archive.org/details/ahistorymathema01cajogoog/page/n181.

"Briggs Logarithmustabelle":

H. Briggs, *Arithmetica Logarithmica*, 1624. Public domain. https://archive.org/details/arithmeticalogar00brig/page/n5.

Bücher, Artikel, Originaltexte

Bücher:

F. Staudacher, *Jost Bürgi, Kepler und der Kaiser*, NZZ Libro, 2018.

K. Clark, *Jost Bürgi's Aritmetische und Geometrische Progreß Tabulen (1620)*, Birkhäuser, 2015.

F. Cajori, *A History of Mathematics*, Macmillan, 1894.

Artikel:

J. Waldvogel, Jost Bürgi and the discovery of the logarithms, *Elem. Math.* 69 (2014) 89–117.

D. Roegel, A Reconstruction of Briggs' *Logarithmorum chilias prima* (1617), LOCOMAT project, 2011.

Originaltexte:

M. Stifel, *Arithmetica Integra*, 1544. https://archive.org/details/bub_gb_fndPsRv08R0C/page/n5/mode/2up

H. Gieswald, *Justus Byrg als Mathematiker und dessen Einleitung in seine Logarithme*, Danzig, 1856, https://reader.digitale-sammlungen.de/de/fs3/object/display/bsb10979407_00001.html, no copyright – non-commercial use only.

J. Napier, *Mirifici Logarithmorum*, 1616, https://archive.org/details/mirificilogarit00napi/page/n7/mode/2up.

H. Briggs, *Arithmetica Logarithmorum*, 1624, https://archive.org/details/arithmeticalogar00brig/page/n5

J. Kepler, *Tabulae Rudolphinae*, 1627. https://archive.org/details/tabulaerudolphin00kepl/page/n1.
Originaltext zusammen mit deutscher Übersetzung: Herausgeber Jürgen Reichert, Verlag Königshausen & Neumann, 2014.