

## References

- [1] P. Ehrenfest, *Ansprache zur Verleihung der Lorentzmedaille an Professor Wolfgang Pauli am 31. Oktober 1931*. Versl. Akad. Amsterdam **40**, 121–126 (1931).
- [2] Ch. P. Enz, *No Time to be Brief: A Scientific Biography of Wolfgang Pauli*, Oxford University Press, 2002.
- [3] W. Pauli, *Relativitätstheorie*, in Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. 5, Teil 2 (Teubner, Leipzig, 1921), p.p. 539–775. Neu herausgegeben und kommentiert von D. Giulini, Springer-Verlag, 2000. English Edition: *Theory of Relativity*, Pergamon Press, 1958.
- [4] W. Pauli, *Remarks on the History of the Exclusion Principle*, Science **103**, 213–215 (1946).
- [5] W. Pauli, *Über die Gesetzmässigkeiten des anomalen Zeemaneffektes*, Z. Physik **16**, 155–164 (1923).
- [6] W. Pauli, *Über den Einfluss der Geschwindigkeitsabhängigkeit der Elektronenmasse auf den Zeemaneffekt*, Z. Physik **31**, 373–385 (1925).
- [7] W. Pauli, *Exclusion principle and quantum mechanics*. Nobel lecture, delivered at Stockholm, December 13, 1946.

- [8] W. Pauli, *Über den Zusammenhang des Abschlusses der Elektronengruppen im Atom mit der Komplexstruktur der Spektren*, Z. Phys. **31**, 765–783 (1925).
- [9] B. L. van der Waerden, *Exclusion Principle and Spin*, in M. Fierz and V. F. Weisskopf: *Theoretical Physics in the Twentieth Century: A Memorial Volume to Wolfgang Pauli*. Interscience, New York 1960, p. 199–244.
- [10] E. C. Stoner, *The Distribution of Electrons among Atomic Levels*, Philosophical Magazine **48**, 719–736 (1924).
- [11] N. Straumann, *On Wolfgang Pauli's most important contributions to physics*. Opening talk at the symposium: WOLFGANG PAULI AND MODERN PHYSICS, in honor of the 100<sup>th</sup> anniversary of Wolfgang Pauli's birthday, ETH (Zurich), Mai 4–6 2000; physics/0010003.
- [12] *Wolfgang Pauli. Wissenschaftlicher Briefwechsel mit Bohr, Einstein, Heisenberg u.a.* Band I: 1919–1929. Herausgegeben von A. Hermann, K. v. Meyenn und V. F. Weisskopf. Springer-Verlag, New York/Heidelberg/Berlin 1979.
- [13] E. L. Schucking, *Jordan, Pauli, Politics, Brecht, and a variable gravitational constant*, Physics Today, October 1999, p. 26–31.
- [14] W. Pauli, *Zur Quantenmechanik des magnetischen Elektrons*, Z. Physik **43**, 601–623 (1927).

# Physik Anekdoten und persönliche Erinnerungen (26)

## Kepler, Platon und Schläfli

Bernhard Braunecker



Abb. 1: Johannes Kepler

Johannes Kepler (1571 - 1630) zählt zu den bedeutendsten Wissenschaftlern in der Geschichte der Menschheit (Abb. 1). Die mit seinem Namen verbundenen drei Gesetze werden von vielen als Beginn der modernen Astronomie gesehen. Ihre Formulierung gelang Kepler erst, als er sich von den kosmischen Modellansätzen löste, die er noch in seinem Jugendwerk *Mysterium Cosmographicum* (1597) angewandt

hatte. Im Folgenden zeigen wir, dass diese aus heutiger Sicht unhaltbaren Annahmen dennoch erstaunlich gute Abschätzungen über die Radien der Orbitbahnen der damals bekannten sechs Planeten lieferten<sup>1</sup>.

### Keplersche Triplekonstellation

An der SPG Jahrestagung 2021 in Innsbruck wurde in einer Spezialsitzung anlässlich des 450. Geburtstags von Kepler über seine erfolgreiche, wenn auch nicht reibungslose Zusammenarbeit mit dem Schweizer Jost Bürgi (1552 - 1632) und dem Dänen Tycho Brahe (1546 - 1601) um 1600 in Prag berichtet<sup>2</sup>. Die fachliche Kompetenz dieser Triplekonstellation mit Kepler als genialen Wissenschaftler, Bürgi als herausragenden Pragmatiker und Brahe als gut vernetzten Manager schuf die Voraussetzungen für das später publizierte epochale Werk der keplerschen Gesetze.

Der entscheidende Durchbruch gelang Kepler, wie er später in seinem Werk *Harmonices Mundi* (1619) erklärte, als er die kopernikanischen Annahmen verwarf, demzufolge

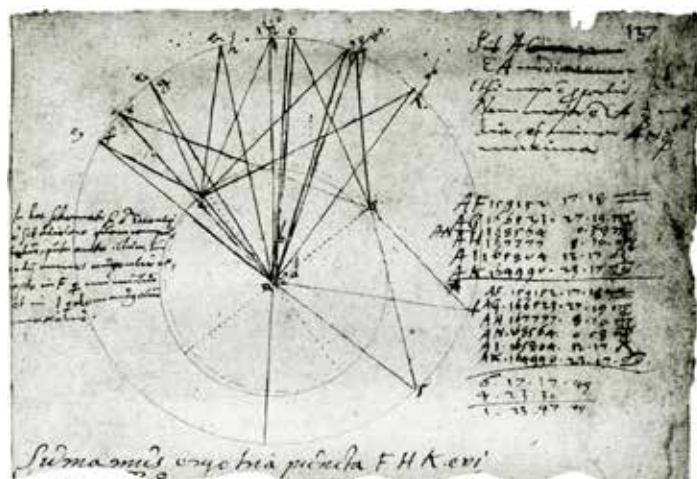


Abb. 2: Das Bild zur Marsbahn aus Band XX, Teilband 2, Seite 132 der Gesammelten Werke Keplers.

die damals bekannten sechs Planeten Merkur bis Saturn sich auf Kreisbahnen um die Sonne bewegen würden. Stattdessen führte er zuerst ovale, dann elliptische Bahnen ein und konnte so beim Planeten Mars die Bahnbewegungen in quantitativ guter Übereinstimmung mit den Beobachtungen beschreiben (Abb. 2). Allerdings konnte Kepler nicht die Ursache der Bewegung erklären; das gelang erst im Jahre 1687 Isaac Newton (1643 - 1727), also Generationen später mit dem Gravitationsansatz.

### Das platonische Modell

Gibt es nun, wie der Titel dieses Artikels andeutet, eine weitere fruchtbare keplersche Triplekonstellation und diesmal sogar mit Personen, die Hunderte, ja Tausende von Jahren von Kepler trennten?

Dazu soll im Folgenden ein Blick auf Keplers bereits erwähntes Jugendwerk *Mysterium Cosmographicum* von 1597 geworfen werden. Seine damalige Vorstellung vom Kosmos beruhte auf den fünf platonischen Körpern, a) dem Oktaeder aus acht Dreiecken bestehend und die Luft sym-

<sup>1</sup> <https://www.jostbuergi.com/2021/10/22/warum-hat-jost-b%C3%BCrgi-nicht-die-keplerschen-gesetze-der-planetenbewegung-entdeckt/>

<sup>2</sup> [https://www.sps.ch/fileadmin/articles-pdf/2021/Mitteilungen\\_PT012021.pdf](https://www.sps.ch/fileadmin/articles-pdf/2021/Mitteilungen_PT012021.pdf)

bolisierend, b) dem Ikosaeder (zwanzig Dreiecke, *Wasser*), c) dem Dodekaeder (zwölf Fünfecke, *Kosmos*), d) dem Tetraeder (vier Dreiecke, *Feuer*) und e) dem Hexaeder (Würfel mit sechs Quadraten, *Erde*) (Abb. 3), die in dieser Reihenfolge geschachtelt angeordnet sind mit der Sonne im gemeinsamen Zentrum.



Abb. 3: Die fünf platonischen Körper

Da es in jedem der fünf platonischen Körper sowohl eine Innenkugel gibt, die all seine Flächenelemente von innen berührt, als auch eine umhüllende Aussenkugel, auf der alle seine Eckpunkte liegen, passte Kepler nun die Planetensphären so ein, dass sie einmal die Aussenkugel eines Körpers sind, gleichzeitig aber auch die Innenkugel des nach aussen folgenden nächsten Körpers. So ist die Bahn der Erde einerseits die Aussenkugel des Ikosaeders, andererseits die Innenkugel des Dodekaeders.

Die Anordnung der Körper in Abb. 3 von links nach rechts gibt die Reihenfolge der kosmischen Schachtelung an. So liegt das Oktaeder zwischen Merkur und Venus, das Ikosaeder zwischen Venus und Erde, das Dodekaeder zwischen Erde und Mars, das Tetraeder zwischen Mars und Jupiter und der Würfel zwischen Jupiter und Saturn. Durch diese nahtlose Schichtung waren somit die Radien der Kugelschalen, das heisst die der Kreisbahnen der Planeten, rein geometrisch definiert. Abb. 4 zeigt die räumliche Anordnung der fünf platonischen Körper mit der Sonne im gemeinsamen Zentrum. In Tabelle 1 sind zeilenweise die sechs Planeten Merkur bis Saturn aufgeführt, sowie jeweils der gemessene Radius ihres Orbits um die Sonne in AE, der astronomischen Einheit. Die Grösse  $\eta_1$  gibt das Verhältnis der gemessenen Radien benachbarter Planeten an. In den Spalten "Histo-

risches Modell" sind die berechneten Radien der Innenkugel  $R_i$  und der Aussenkugel  $R_A$  für die fünf platonischen Körper angegeben, allerdings in noch zu bestimmenden Einheiten a.

Ihre Berechnung erfolgt mit Hilfe der nach dem Mathematiker Ludwig Schläfli (siehe Box) benannten *Schläfli Indizes*<sup>3</sup>  $p$  und  $q$ , welche eine einfache Beschreibung von Polygonen, Polyedern, Parkettierungen usw. erlauben. Für platonische Körper<sup>4</sup> gilt: Man erhält für den Radius der Aussenkugel  $R_A = a/2 \cdot \tan(\pi/q) \cdot \tan(\beta/2)$  und für den Radius der Innenkugel  $R_i = a/2 \cdot \text{ctg}(\pi/p) \cdot \tan(\beta/2)$ . Dabei ist  $\beta = 2 \cdot \text{asin}\{\cos(\pi/q) \cdot \sin(\pi/p)\}$ . Daraus folgt für das Verhältnis  $\eta_2 = R_A / R_i = \tan(\pi/p) \cdot \tan(\pi/q)$ . Vergleicht man die  $\eta_2$  Werte mit den aus aktuellen Messwerten abgeleiteten  $\eta_1$  Werten, so ergeben sich Differenzen von maximal 20 %, was erstaunlich gut ist.

Beispiel: So berührt die Jupiterbahn den Hexaeder (Würfel mit Kantenlänge  $a_{\text{Hexa}}$ ) als Innenkugel mit Radius  $0.5 \cdot a_{\text{Hexa}}$ , während der Saturn als Aussenkugel den Radius  $\sqrt{3}/2 \cdot a_{\text{Hexa}}$  einnimmt. Das Verhältnis  $\sqrt{3} : 1 = 1.732$  entspricht bis auf etwa 6 % dem Verhältnis der astronomischen Messwerte  $9.60 \text{ AE} / 5.20 \text{ AE} = 1.842$ .

Man kann mit den Werten aus Tabelle 1 die Orbitradien im historischen Modell abschätzen (Tabelle 2), braucht dazu allerdings die Körpereinheiten  $a_{\text{Okta}}$  bis  $a_{\text{Hexa}}$ . Hier nutzt man

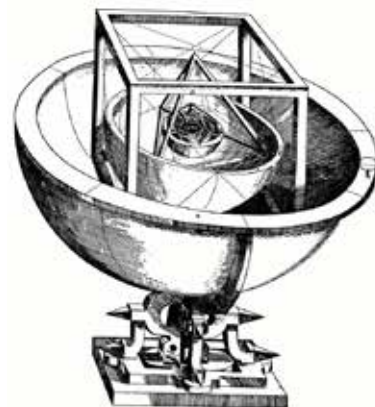


Abb. 4: Aus Keplers *Mysterium Cosmographicum*

3 <https://de.wikipedia.org/wiki/Schläfli-Symbol>

4 [https://de.wikipedia.org/wiki/Platonischer\\_Körper](https://de.wikipedia.org/wiki/Platonischer_Körper)

Moderne Astronomie			Historisches Modell							Fehler
Planeten		$\eta_1$	Platonischer Körper	Bild	Schläfli Index		Kugelradien			$(\eta_1 - \eta_2) / \eta_1$
$R_{\text{Orbit}}$ (AE)					p	q	$R_i$	$R_A$	$\eta_2 = R_A / R_i$	
Merkur	0.39									
		1.87	Oktaeder (Luft)		3	4	0.408	0.707	1.73	8 %
Venus	0.72									
		1.38	Ikosaeder (Wasser)		3	5	0.756	0.952	1.26	10 %
Erde	1.00									
		1.52	Dodekaeder (Kosmos)		5	3	1.114	1.401	1.26	21 %
Mars	1.52									
		3.41	Tetraeder (Feuer)		3	3	0.204	0.612	3.00	14 %
Jupiter	5.20									
		1.84	Hexaeder (Erde)		4	3	0.500	0.868	1.73	6 %
Saturn	9.60									

Tabelle 1: Orbitradien der sechs Planeten, sowie die Radienverhältnisse benachbarter Planeten  $\eta_1$ , bestimmt aus modernen astronomischen Messungen und  $\eta_2$  unter Benützung des platonischen Modells.

aus, dass die vier Planeten Venus bis Jupiter jeweils in zwei platonischen Körpern vorkommen. Beispiel: Der Orbitradius von Merkur ist nach Tabelle 1  $r_{\text{Merkur}} = 0.408 a_{\text{Okta}}$ . Unter Benutzung der Daten der Venus findet man  $a_{\text{Okta}} = 0.756 / 0.707 a_{\text{Ikosa}}$ . Wegen  $r_{\text{Erde}} = 0.952 a_{\text{Ikosa}}$  wird somit  $r_{\text{Merkur}} = (0.408 \cdot 0.756) / (0.707 \cdot 0.952) r_{\text{Erde}} = 0.46 r_{\text{Erde}}$  im Vergleich zum genauen Wert von  $0.39 r_{\text{Erde}}$ .

Dabei werden die Abweichungen von den heutigen Messwerten wegen der Fehlerfortpflanzung mit zunehmender Entfernung des Planeten von der Erde grösser.

Planet	Moderne Astronomie (AE)	Historisches Modell (AE)
Merkur	0.39	0.46
Venus	0.72	0.79
Erde	1.00	1.00
Mars	1.52	1.26
Jupiter	5.20	3.77
Saturn	9.60	6.54

Tabelle 2: Orbitradien der sechs Planeten nach dem historischen Modell im Vergleich zu heutigen Messdaten, jeweils in AE.



Abb. 5: Schalenanordnung der Planeten und der platonischen Körper

In Abb. 5 aus *Harmonices Mundi* ist das Schachtelungskonzept dargestellt. Interessant ist die eingezeichnete geozentrische Bewegung der Sonne um die Erde gemäss der Vorstellung Tycho Brahes, bei der alle anderen Planeten jedoch weiterhin um die Sonne kreisen (roter Strich).

Obwohl die Diskrepanzen trotz der unrealistischen Modellannahme erstaunlich klein sind, wurden sie von Kepler als Wissenschaftler nicht akzeptiert, weshalb er das Modell später verwarf.

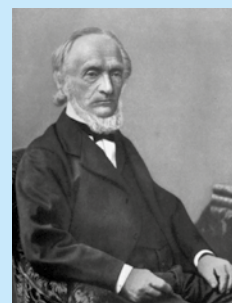
Nur warum liess er sich in jungen Jahren auf diese mehr philosophisch geprägte Modellierung ein?

### Kepler als Esoteriker

Für Kepler und viele Wissenschaftler seiner Zeit hatten Natur und Wirklichkeit noch einen verborgenen Sinngehalt, der sich nur dem Esoteriker, dem Suchenden und Wissenden erschloss. Ihre Welterkenntnis beschränkte sich nicht auf das Rationale, sondern suchte bewusst die Natur in allen ihren Gestaltungen zu erfassen. Nicht nur messbare Quantitäten wie Anzahl, Gewicht, Beschaffenheit und Bewegungen, sondern auch Qualitäten, in denen Sinnliches und Übersinnliches, Körper und Geist, Glaube und Wissen als Gesamtes erfahren werden, mussten vom Suchenden betrachtet werden.

Kepler war in diesem Sinne Naturphilosoph mit stark theologischen Vorstellungen. Er wollte das Himmelsystem verstehen und suchte als Neo-Platoniker stets auch nach dem

**Ludwig Schläfli** (1814 - 1895) war ein Schweizer Mathematiker, der sich mit Geometrie und Funktionentheorie beschäftigte. Er wurde 1848 zum Privatdozenten ernannt, 1853 zum ausserordentlichen Professor und 1872 schliesslich zum ordentlichen Professor an der Universität Bern. Er spielte eine Schlüsselrolle bei der Entwicklung des Begriffs der *Dimension*, welcher unter anderem eine entscheidende Rolle in der *Physik* spielt. Obwohl seine Ideen heute in jedem Grundstudium in Mathematik behandelt werden, ist Schläfli selbst unter Mathematikern eher unbekannt<sup>1</sup>.



Mit ihm verwandt ist **Alexander Friedrich Schläfli** (1832 - 1863), der sein gesamtes Vermögen der Schweizerischen Gesellschaft für Naturwissenschaften (SGN) vermachte unter der Bedingung, "dass die Gesellschaft [...] einen jährlichen und immerwährenden Preis über eine Frage der physikalischen Wissenschaften stiften soll". Seit der ersten A. F. Schläfli-Preis Verleihung im Jahr 1866 haben bis heute mehr als 100 Preisträgerinnen und Preisträger diesen Preis erhalten<sup>2</sup>.

1 Erwin Neuenschwander: "Schläfli, Ludwig", in: *Historisches Lexikon der Schweiz (HLS)*, Version vom 09.08.2011. <https://hls-dhs-dss.ch/de/articles/028934/2011-08-09/>

2 Heinz Balmer: "Schläfli, Alexander", in: *Historisches Lexikon der Schweiz (HLS)*, Version vom 09.08.2011. <https://hls-dhs-dss.ch/de/articles/032096/2011-08-09/>

Sinn von Naturerscheinungen, der sich nicht messen liess. Das war für ihn kein Widerspruch zu seinen astronomischen Studien, da die Hauptaufgabe des Astronomen das Erstellen von Horoskopen für seinen Arbeitgeber oder für wichtige Personen war wie das hier gezeigte für den Feldherrn Albrecht von Wallenstein (Abb. 6).

Diese, aus heutiger Sicht pseudowissenschaftliche Tätigkeit, führte jedoch zur Gründung weiterer Universitäten, da astrologische und somit astronomische Fragestellungen nicht von der Kirche behandelt wurden.

### Schlusswort

Die Tatsache, dass ein esoterisches Modell, das in der Tradition der antiken pythagoreischen Schule wurzelt, sich über ein Jahrtausend hielt und erstaunlich gut die Beobachtungsdaten wiedergab, ist schon bewundernswert. Hier könnte man in Anlehnung an das Zitat von Wolfgang Pauli: „Das ist nicht nur nicht richtig; es ist nicht einmal falsch“ bemerken, dass der platonische Ansatz, die Planetenradien durch geometrische Eigenschaften hochsymmetrischer Körper zu beschreiben, so grossartig und kühn ist, dass er nicht mal wahr sein muss.

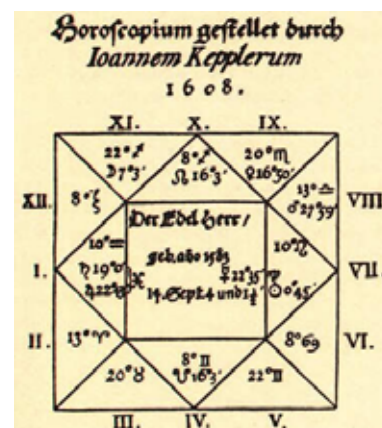


Abb. 6: Horoskop von Wallenstein