

Die Gesetze von Johannes Kepler (1571-1630) und einige ihrer Anwendungen

Bernhard Braunecker

INHALT

Zusammenfassung.....	1
1 Die allgemeine Situation zu Keplers Zeiten	2
2 Zur Person von Johannes Kepler	3
3 Gravitation.....	4
3.1 Mathematische Ableitung	4
4 Elliptische Bahnkurven	5
5 Das 3. Keplersche Gesetz.....	6
6 Sonnensystem HR 8799 im Sternbild Pegasus	6
7 Verschiedene kinetische Energien	8
8 Abbremsung eines Satelliten in der Erdatmosphäre.....	9
9 Schlussbemerkung.....	12

ZUSAMMENFASSUNG

Eine der historisch interessantesten ‚Triple-Konstellationen‘ war die Zusammenarbeit des Deutschen Johannes Kepler, des Dänen Tycho Brahe und des Schweizer Jost Bürgi um 1600 in Prag am Hofe des Kaisers Rudolf II. Kepler versuchte damals, die von Brahe gelieferten Messdaten der Planetenbewegungen um die Sonne mit Hilfe des Ansatzes kreisförmiger Bahnkurven quantitativ zu erklären, fand aber Diskrepanzen von bis etwa 8 Bogenminuten, was sowohl an Messungenauigkeiten als auch am Ansatz liegen konnte. Als sich auch mit den genaueren Winkelinstrumenten Bürgis die Diskrepanz nicht beheben liess, ersetzte Kepler die Kreisbahnen zuerst durch Ovale, dann durch elliptische Bahnen und fand nunmehr weitaus bessere Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment. Der neue Ansatz ermöglichte ihm, weitere Gesetzmässigkeiten der Planetenbewegung abzuleiten, die als die drei Keplerschen Gesetze in die Geschichte der modernen Naturwissenschaften eingingen. Der Zeitpunkt ihrer Formulierung wird von vielen als Beginn der modernen Astronomie gesehen.

Wir bringen im Folgenden die mathematische Ableitung der Bahnbewegungen unter Einbezug der von Isaac Newton im Jahre 1687 eingeführten Gravitationskraft und kommen zu allgemein konischen Bahnkurven (Kegelschnitte). Wir illustrieren die Gültigkeit der Keplerschen Gesetze am Beispiel jüngst aufgenommener astronomischer Bilder einer noch sehr jungen Sonne, die von mehreren Planeten der Grösse Jupiters auf elliptischen Bahnen umkreist wird. Die mathematische Ableitung zeigt ferner, dass die Grösse der Gesamtenergie des bewegten Körpers den Typus der konischen Bahn bestimmt, mit der er das Zentralgestirn umkreist. Dies demonstrieren wir am Beispiel eines aus dem All kommenden Satelliten, der die Erde in einer

parabolischen Bahn anfliegt und durch Abbremsen in der Erdatmosphäre zuerst auf elliptische und schliesslich auf kreisförmige Bahnkurven gelenkt wird.

1 DIE ALLGEMEINE SITUATION ZU KEPLERS ZEITEN

Bereits seit dem 14. Jahrhundert gab es Astrolabien, Sonnenuhren, Quadranten, Armillarsphären, Jakobsstäbe, Magnetkompass und mechanische Uhren, die alle dringend verbessert werden mussten. So erforderten die sozial und politisch wichtige Astrologie und in ihrem Gefolge die wissenschaftliche Astronomie eine zunehmend bessere Messgenauigkeit der Sterndaten und daher *grössere* Beobachtungs- und Messinstrumente mit *feiner* unterteilten Skalen. Ein weiterer wichtiger Technologietreiber war die Entwicklung der transozeanischen Schifffahrt, die zur Einführung von nautischen Astrolabien und Kreuzstäben sowie verbesserten Magnetkompassen führte.



Johannes Kepler
(1571-1630)

Gleichzeitig gewann die Arbeit von Topographen und Kartographen wegen der zunehmenden Ausbreitung der Städte und des Handels sowie durch die Notwendigkeit der Landvermessung immer mehr an Bedeutung. Neue Vermessungsinstrumente wie Graphometer, Messtische, Vermessungskreuze und -ketten wurden dazu immer häufiger eingesetzt. Auch Architekten, Zeichner und Künstler benutzten eine große Anzahl neuartiger Zeichengeräte, mit denen sie Kurven nachzeichnen, Bilder kopieren oder in ihren Abmessungen verändern und perspektivische Zeichnungen anfertigen konnten. Hinzu kam, dass an den ersten Universitäten didaktische Instrumente für den Unterricht in Astronomie und anderen wissenschaftlichen Disziplinen benötigt wurden.



All das führte zum Erstarren des feinmechanischen Handwerks und zu einer Konzentration des technischen Wissens in ‚Exzellenz‘-Zentren wie Nürnberg, Leuven, Antwerpen, London, Florenz, Kassel und Prag, in denen die besten Handwerker und somit auch die besten Wissenschaftler ihrer Zeit tätig waren. Herausragende Persönlichkeiten wie Johannes Kepler oder auch Jost Bürgi mussten also immer wieder reisen, um einen Förderer und Arbeitgeber zu finden, aber auch um wissenschaftlich und technisch auf

dem neuesten Stand zu bleiben. Ein weiterer wichtiger Durchbruch in der Messtechnik (Metrologie) kam dann durch die optischen Beobachtungsgeräte wie die ersten Spiegel- oder Linsenteleskope keplerscher, galileischer oder etwas später newtonscher Bauart. Sie machten bei gleicher Instrumentengrösse wegen der optischen Vergrößerung mehr Objektdetails sichtbar, allerdings unter Einengung des Gesichtsfelds. Da die Instrumente für



Planetenuhr



Kristalluhr

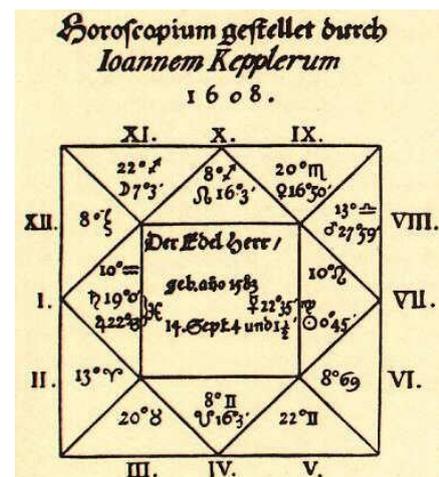
Wissenschaftler und Praktiker zu unentbehrlichen Werkzeugen wurden, wurden sie auch zu kostbaren und seltenen Sammlerstücken, wie die hier gezeigte Kristalluhr ¹ und die Planetenuhr ² von Jost Bürgi.

Fürsten und Adelige erwarben solche Unikate, die auch künstlerische Meisterwerke waren, teils aus wissenschaftlichem Interesse oder aus kultureller Neugier, aber auch als eindrucksvolle Symbole ihrer Macht und ihres Reichtums.

So zog es den Uhrmacher und Instrumentenbauer Jost Bürgi nach Kassel, wo er mit innovativen Konstruktionen und neuartigen mathematischen Methoden aufwartete und sich so vom begabten Handwerker zu einem aus unserer heutigen Sicht wichtigen Astronomen seiner Zeit entwickelte. Seine Kenntnisse und Erfahrungen, sowie seine präzisen Himmelsgloben und Sternkarten ermöglichten verlässlichere und genauere Sternbeobachtungen als bis anhin. So wurde er zum wichtigen Mitarbeiter von Johannes Kepler, mit dem er von 1603 bis 1612 in Prag zusammenarbeitete.

2 ZUR PERSON VON JOHANNES KEPLER

Viele Wissenschaftler zog es um 1600 nach Prag, wo sie in Kaiser Rudolf II. einen verständnisvollen Förderer ihrer Künste fanden, so neben den Astronomen Kepler und Bürgi auch Tycho Brahe, aber auch den Nürnberger Alchimisten Michael Maier als Leibarzt des Kaisers. Für viele von ihnen hatten Natur und Wirklichkeit noch einen verborgenen Sinngehalt, der sich nur dem Esoteriker, dem Wissenden erschloss. Sie pflegten eine Welterkenntnis, die sich nicht auf das Rationale beschränkte, sondern bewusst die Natur in allen ihren Gestaltungen zu erfassen suchte. Diese Art der Erforschung der Natur beschränkte sich nicht allein auf messbare Quantitäten wie Anzahl, Gewicht, Beschaffenheit und Bewegungen, sondern auch auf Qualitäten, in denen Sinnliches und Übersinnliches, Körper und Geist, Glaube und Wissen als Gesamtes erfahren werden.



In unserer Publikation ‚Kepler, Platon und Schläfli‘ ³ zeigen wir, dass das von Kepler in seinem Jugendwerk *Mysterium Cosmographicum* (1597) noch benutzte kosmische Modell, bei dem er die Bahnen der damals bekannten sechs Planeten Merkur bis Saturn um die Sonne einerseits als Aussenkugel eines der fünf platonischen Körper beschrieb, andererseits aber auch als Innenkugel eines anderen platonischen Körpers, erstaunlich genaue Werte lieferte.

¹ Jost Bürgis Bergkristalluhr mit eingebautem transparentem Himmelsglobus, hergestellt 1622/27 in Prag und heute in der Habsburgischen Kunstkammer des Kunsthistorischen Museums in Wien

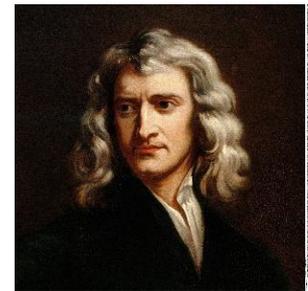
² Bürgis Planetenuhr, Prag 1605

³ <https://www.sps.ch/fileadmin/doc/Mitteilungen/Mitteilungen.69.pdf> und dort Seite 31

Kepler hatte seine drei Gesetze mühsam aus den Messdaten von Tycho Brahe und Jost Bürgi abgeleitet, nachdem er den gordischen Knoten einer Kreisbewegung der Planeten um die Sonne durchschlagen und elliptische Bahnen eingeführt hatte, die die Messwerte besser erklären konnten.

Nur was war die physikalische Begründung? Die lieferte 1687 Isaac Newton (1643-1727), als er eine zur Sonne weisende und deshalb quer zur Bewegungsrichtung wirkende Kraft erkannte und einführte, die Gravitationskraft.

Im Folgenden soll die elliptische Bahngleichung der Erde um die Sonne aus dem Gravitationsgesetz abgeleitet und quantitativ beschrieben werden. Dazu benutzen wir die Gravitationskonstante $\gamma = 6.67259 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg s}^2)$, die Sonnenmasse $M_S = 1.9801 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ und die Masse der Erde $m_E = 5.9736 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ und das so erhaltene Produkt $C = \gamma m_E M_S = 7.8925 \cdot 10^{44} \text{ m}^3 \text{ kg/s}^2$.



Isaac Newton 1642-1727

Bei der folgenden Ableitung müsste man streng genommen berücksichtigen, dass beide Körper sich um den gemeinsamen Schwerpunkt drehen. Da wegen des immensen Massenunterschieds dieser nur etwa 450 km vom Sonnenzentrum entfernt liegt, kann man die folgende Betrachtung stark vereinfachen, indem man den Schwerpunkt in die Sonne legt, diese also als ruhend betrachtet, während die Erde sich um sie herum bewegt.

3.1 MATHEMATISCHE ABLEITUNG ⁴

Alle physikalischen Grössen, die als Vektor definiert sind, werden fett gedruckt. Die Sonne sei im Koordinatenursprung $\mathbf{r}_S = [0,0,0]$. Der Planet Erde werde beschrieben durch den Ortsvektor \mathbf{r}_E , wobei seine Grösse im Falle einer Kreisbewegung $r_E = |\mathbf{r}_E| = 1 \text{ AE}$ ist, und durch den Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v}_E = d\mathbf{r}_E/dt = \dot{\mathbf{r}}_E$. Damit besitzt die Erde den *Bahnimpuls*

$$\mathbf{p}_E = m_E \mathbf{v}_E = m_E \dot{\mathbf{r}}_E. \quad (1)$$

Die *Newtonsche Gravitationskraft* \mathbf{F}_E der Sonne auf die Erde ist proportional zum Ortsvektor \mathbf{r}_E und man findet durch das zweite Newtonsche Gesetz den Zusammenhang zwischen Kraft und Beschleunigung

$$\mathbf{F}_E = \dot{\mathbf{p}}_E = m_E \mathbf{a}_E = (\gamma m_E M_{\text{Sun}}/r_E^3) \mathbf{r}_E = (C/r_E^3) \mathbf{r}_E \quad (2)$$

mit dem Beschleunigungsvektor $\mathbf{a} = d^2\mathbf{r}/dt^2$.

Die Erde hat dann die potentielle Energie $E_{\text{Pot}} = -C/r_E$ und die kinetische Energie $E_{\text{Kin}} = \frac{1}{2} m_E v_E^2$ und somit die Gesamtenergie ⁵

$$E_{\text{Total}} = E_{\text{Pot}} + E_{\text{Kin}}. \quad (3)$$

Als Nächstes bestimmt man den *Drehimpuls* der Erde

$$\mathbf{L}_E = \mathbf{r}_E \times \mathbf{p}_E = m_E (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}). \quad (4)$$

⁴ H. Wegener, Physik für Hochschulanfänger, Teubner Studienbücher, B.G. Teubner Stuttgart 1991, ISBN 3-519-23053-4

⁵ Die potentielle Energie ist im Unendlichen Null. Wegen des Minuszeichens wird sie folglich im Endlichen negativ. Deshalb wird die Gesamtenergie bei kreisförmigen und elliptischen Bahnen negativ, bei parabolischen Bahnen gleich Null und bei hyperbolischen Bahnen grösser Null.

Dieser ist zeitlich konstant, denn $d\mathbf{L}_E/dt = m_E [(\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}}) + (\mathbf{r} \times \mathbf{a})] = m_E (\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}}) + (C/r^3) (\mathbf{r} \times \mathbf{r}) = \mathbf{0}$.

Man bildet nun die Grösse $\mathbf{p}_E \times \mathbf{L}_E$ und leitet sie nach der Zeit ab:

$$\begin{aligned} d/dt (\mathbf{p}_E \times \mathbf{L}_E) &= \dot{\mathbf{p}}_E \times \mathbf{L}_E + \mathbf{p}_E \times d\mathbf{L}_E/dt = \dot{\mathbf{p}}_E \times \mathbf{L}_E = (C/r^3) (\mathbf{r}_E \times \mathbf{r}_E \times \mathbf{p}_E) = \\ &= (C/r_E^3) ((\mathbf{r}_E \cdot \mathbf{r}_E) \mathbf{p}_E - (\mathbf{r}_E \cdot \mathbf{p}_E) \mathbf{r}_E) = (C m_E / r_E^3) ((\mathbf{r}_E \cdot \mathbf{r}_E) \dot{\mathbf{r}}_E - (\mathbf{r}_E \cdot \dot{\mathbf{r}}_E) \mathbf{r}_E) = \\ &= (C m_E) (\dot{r}_E / r_E - (\dot{r}_E / r_E^2) \mathbf{r}_E) = (C m_E) d/dt (r_E / r_E). \end{aligned} \quad (5)$$

Nun kann man die Gleichung (5) zeitlich integrieren und bekommt

$$\mathbf{p}_E \times \mathbf{L}_E = (C m_E) (r_E / r_E + \boldsymbol{\varepsilon}) \quad (6)$$

mit der Integrationskonstante $\boldsymbol{\varepsilon}$ als Vektor in Richtung der x-Achse.

Durch Vektormultiplikation von (6) mit \mathbf{r}_E ergibt sich

$$(\mathbf{p}_E \times \mathbf{L}_E) \cdot \mathbf{r}_E = (\mathbf{r}_E \times \mathbf{p}_E) \cdot \mathbf{L}_E = \mathbf{L}_E \cdot \mathbf{L}_E = L_E^2 = (C m_E) (r_E + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{r}_E) = (C m_E) (r_E + \varepsilon r_E \cos \varphi), \quad (7)$$

und schliesslich durch Auflösung von (7) nach r_E die bekannte Kegelschnittsgleichung

$$r_E = P / (1 + \varepsilon \cos \varphi) \quad (8)$$

mit

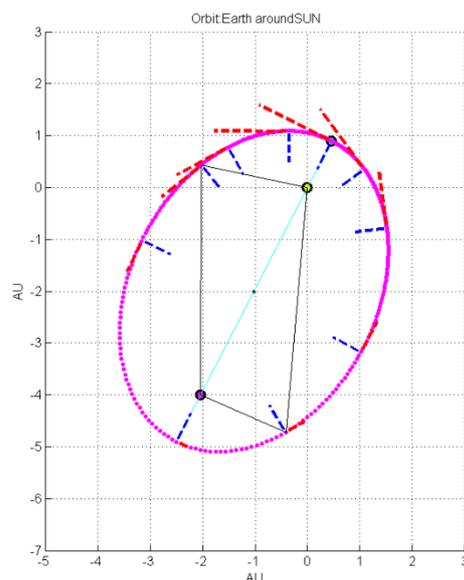
$$P = L_E^2 / (C m_E) \text{ und } \varepsilon^2 - 1 = 2 (P / C) E_{\text{Total}}. \quad (9)$$

Im letzten Ausdruck ist P der sogenannte Halbparameter und die Integrationskonstante ε die numerische Exzentrizität. Im Falle einer Kreisbahn ist $\varepsilon = 0$, für die Ellipse gilt $0 < \varepsilon < 1$, für die Parabel $\varepsilon = 1$ und $\varepsilon > 1$ für die Hyperbel.⁷

4 ELLIPTISCHE BAHNKURVEN

Der Planet bewege sich auf einer elliptischen Bahn mit der Sonne in einem der beiden Brennpunkte (*gelber* Punkt). Man sieht für verschiedene Azimutwinkel φ den Normalenvektor in *blau* gestrichelt nach innen zeigend und den Tangentialvektor der Bahngeschwindigkeit in *rot* gestrichelt in Richtung der Planetenbewegung. Die Normale ist die Winkelhalbierende des Punktes zu den beiden Brennpunkten (*schwarze* ausgezogene Linien).

Man erkennt die Aussage des zweiten Keplerschen Gesetzes, dass der Geschwindigkeitsvektor im zur Sonne nahe liegenden Perihel grösser ist als im entfernt gelegenen Aphel.



⁶ A. Budó, Theoretische Mechanik, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1956, Seite 106

⁷ Bronstein-Semendjajew, Taschenbuch der Mathematik, Verlag Harri Deutsch, 1972, Seite 176

5 DAS 3. KEPLERSCHE GESETZ

Im Falle einer Kreisbewegung eines Planeten P um die Sonne gilt

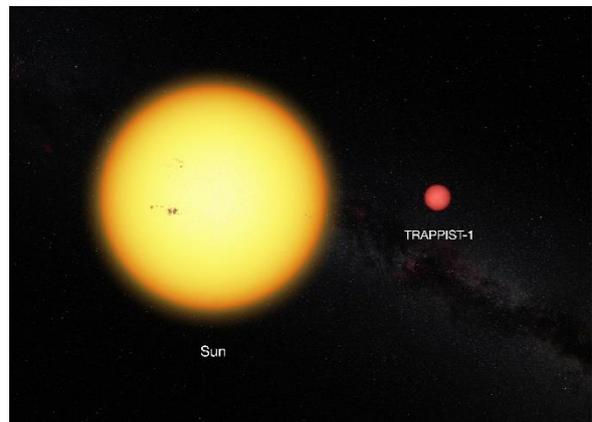
$$v_P^2 = r_P^2 \omega_P^2 = r_P^2 (2\pi/T_P)^2 = \gamma M_S / r_P \quad (10)$$

mit ω_P der Umlaufkreisfrequenz und T_P der Umlaufzeit, und somit erhält man die als 3. Keplersches Gesetz bekannte Beziehung

$$K_S = r_P^3/T_P^2 = \gamma M_S / (2\pi)^2 = 3.3467 \cdot 10^{18} \text{ m}^3/\text{s}^2. \quad (11)$$

Bei Ellipsen ist r_P der Wert der grossen Halbachse. Drückt man r_P in der Einheit AE und T_P in der Einheit Erdjahr TE = $3.1557 \cdot 10^7$ s aus, dann wird im Sonnensystem $K = K_S (TE^2 / AE^3) = 1$. Für die Venus mit $r_{\text{Venus}} = 0.723$ AE erhält man dann ihre Sonnenumlaufzeit $T_{\text{Venus}} = 0.615$ Erdjahre, während für den Mars mit $r_{\text{Mars}} = 1.524$ AE sich die Umlaufzeit $T_{\text{Mars}} = 1.881$ Erdjahre ergibt.

Die Gesetzmässigkeit (11) gilt auch für andere Systeme. Als Vergleich sei der Exoplanet **Trappist-1** erwähnt, ein massearmer roter Zwergstern, der etwa 40 Lichtjahre von uns entfernt ist.⁸ Seine Masse beträgt das 0.089 fache der Masse unserer Sonne, und die Abbildung zeigt einen Grössenvergleich. Dann wird nach Gl. (11) $K_{\text{Trappist}} = 0.089 K_S$. Trappist-1 wird von sieben Planeten, die etwa die Masse der Erde haben, umkreist, bezeichnet als *Trappist-1b* bis *Trappist-1h*.



Die gemessenen Radien ihrer Umlaufbahnen und die gemessenen Umlaufzeiten sind in der Tabelle für vier von ihnen aufgeführt. Man sieht, dass die aus ihnen nach Gl. (11) berechneten K-Werte recht gut mit dem Wert von 0.089 übereinstimmen. Die leichten Abweichungen könnten durch Messungenauigkeiten verursacht sein, aber auch durch starke Gravitationskräfte der Planeten untereinander, da sie sich sehr nahe kommen.

Trappist-1	r_P [AE]	T_P [Erdtage]	K
Trappist 1b	0.0115 AE	1.51	0.0888
Trappist 1e	0.0293 AE	6.10	0.0900
Trappist 1g	0.0469 AE	12.35	0.0899
Trappist 1h	0.0619 AE	18.79	0.0897

6 SONNENSYSTEM HR 8799 IM STERNBILD PEGASUS

Als ein weiteres spektakuläres Beispiel für die Gültigkeit der Keplerschen Gesetze zeigen wir neuere Bildaufnahmen des Sterns **HR 8799**, einer 'jungen' Sonne, aus dem Sternbild *Pegasus*,

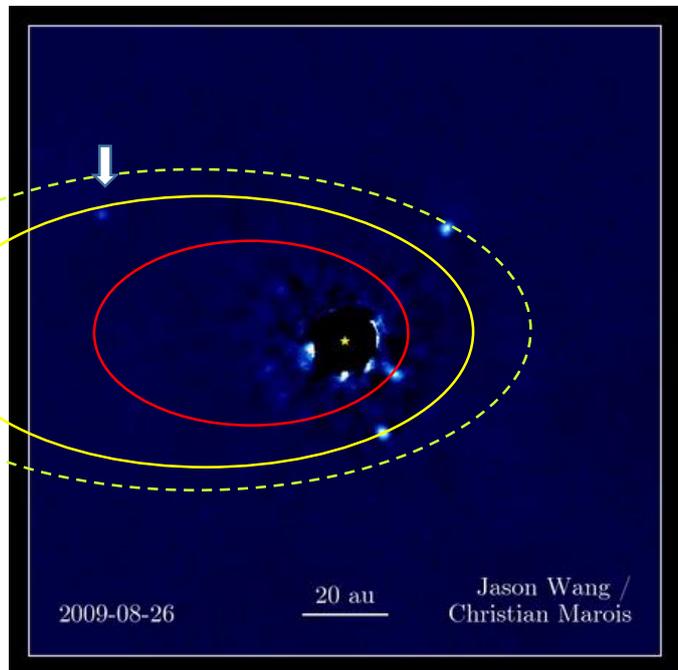
⁸ <https://de.wikipedia.org/wiki/Trappist-1>

der nur 129 Lichtjahre von der Erde entfernt ist. HR 8799 leuchtet etwa fünfmal heller als unsere Sonne und ist nur 30 Millionen Jahre alt! Setzen wir das Alter des Universums von 13.8 Milliarden Jahre gleich einem Zwölfstundentag, dann wäre HR 8799 gerade 1.5 Minuten alt.

Seine vier sichtbaren Planeten sind etwa von der Grösse Jupiters und benötigen zwischen 40 und 400 Erdenjahre für einen Umlauf um den Zentralstern.

Die Bildaufnahmen erfolgten mit dem Keck-Teleskop des Mauna Kea Observatoriums auf Hawaii zwischen August 2009 und Sommer 2016. Man sieht sehr schön, dass die Bahnen zumindest von drei der vier Planeten Ellipsen im Sinne von Kepler und Bürgi sind, allerdings stark exzentrisch im Vergleich zu den Planeten in unserem Sonnensystem. Das ist in der Visualisierung eindrucksvoll zu sehen.⁹

Beim vierten Planeten (weisser Pfeil) ist eine Ellipsenbahn nicht unmittelbar zuordbar, hier wären längere Messzeiten erforderlich gewesen. Aus dem heissen inneren Ring könnten eventuell noch weitere, jedoch kleinere Planeten wie auch in unserem Sonnensystem entstehen.



Durch die Untersuchung junger Sternsysteme erhoffen sich die Wissenschaftler mehr darüber zu erfahren, wie Planetensysteme generell entstehen und sich entwickeln könnten. Die grosse Analogie von HR 8799 zu unserem Sonnensystem könnte helfen, unsere Anfänge besser zu verstehen.¹⁰

⁹ Zu den Aufnahmen: Die Bilder wurden von *Christian Marois* vom National Research Council of Canada's Herzberg Institute of Astrophysics aufgenommen. Die Filmanimation wurde von *Jason Wang* / University of California Berkeley / USA erstellt, der sie mir freundlicherweise zugesendet hat. Die Animationen sieht man bei YouTube unter dem Titel *Four Planets Orbiting HR 8799*: https://www.youtube.com/watch?v=gCXGZaS_6M

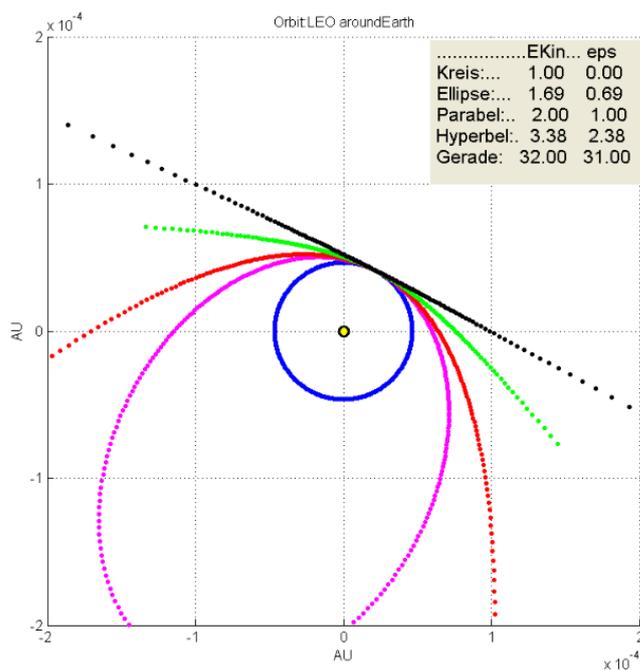
¹⁰ Um Planeten von der Grösse Jupiters in der Entfernung von 129 Lichtjahren direkt von der Erde aus optisch optimal, also beugungsbegrenzt, aufzunehmen, bräuchte es optische Teleskope mit einem Öffnungsdurchmesser von etwa 100 m! Nur selbst mit so einem Riesenteleskop könnte man die volle, also allein durch die Beugung begrenzte Bildauflösung nicht erreichen, da die Turbulenzen der Atmosphäre, und hier hauptsächlich die der *Jetstreams* in etwa 10 km Höhe die Bilder so verwischen, als ob sie nur mit einem 5-10 m grossen Spiegeldurchmesser aufgenommen worden wären. Die moderne Astronomie überwindet diese Auflösungsgrenzen trickreich: zum einen apparativ, indem man die durch die Turbulenzen verbogene Lichtwellenfront eines Sterns durch eine entsprechende Gegendurchbiegung eines der Teleskopspiegel in Echtzeit kompensiert (Adaptive Optik). Alternativ mathematisch, indem man statt einer Langzeitaufnahme des Sterns etwa 100 000 Kurzaufnahmen durchführt, in denen die turbulente Störung zwar weiterhin von Aufnahme zu Aufnahme stochastisch variiert, aber im Einzelbild stationär, also zeitlich *eingefroren* ist. Somit kann jedes Einzelbild algorithmisch korrigiert werden

In der folgenden numerischen Simulation wird untersucht, welche Kurvenform die Erdbahn einnehmen würde, falls die Erde aus irgendwelchen Gründen urplötzlich eine grössere Geschwindigkeit bekäme als in der Realität. Dann könnte die Sonne sie nicht mehr auf einer kreisförmigen Bahn halten, und die Erdbahn würde mit zunehmender Energie zu einer elliptischen, parabolischen, hyperbolischen Kurve, im Extremfall fast sogar zu einer Geraden entarten.

Dies ist in der folgenden Abbildung dargestellt, wo an einem beliebigen Kreispunkt die tangentielle Geschwindigkeit und somit die kinetische Energie sukzessive erhöht werden. Aus Gl. (8) ist ersichtlich, dass dann sowohl der Halbparameter P wie auch die numerische Exzentrizität ϵ sich verändern würden.

Bei einer **kreisförmigen** Bahn gilt $v_E^2 = \gamma M_S / r_E$ und somit wird $E_{\text{Total}} = (-C / r_E + \frac{1}{2} m_E v_E^2) = (-C / r_E + \frac{1}{2} m_E \gamma M_S / r_E) = (-C / r_E + \frac{1}{2} C / r_E) = -\frac{1}{2} C / r_E$, also negativ. Damit wird $P = L_E^2 / (C m_E) = (r_E v_E)^2 / (\gamma M_S) = r_E$, also zum Kreisradius, und $\epsilon^2 - 1 = 2 (P / C) E_{\text{Total}} = 2 (r_E / C) (-\frac{1}{2} C / r_E) = -1$, also $\epsilon = 0$.

Im Falle einer **elliptischen** Bahnkurve muss gelten $0 < \epsilon < 1$. Man erhält dann für die Länge der grossen Halbachse $A_{\text{Ellipse}} = P / (1 - \epsilon^2)$, für die kleinere Halbachse $B_{\text{Ellipse}} = \sqrt{P A_{\text{Ellipse}}}$ und für den Abstand zwischen beiden Brennpunkten $C_{\text{Ellipse}} = \sqrt{A_{\text{Ellipse}}^2 - B_{\text{Ellipse}}^2}$. Da wir in der Abbildung



nur die Geschwindigkeit der Erde, nicht aber den Startort ändern wollen, bleibt der Term der potentiellen Energie in Gl. (8) unverändert, nicht aber die kinetische Energie. Die gezeichnete Bahnkurve in **magenta** ergibt sich, wenn E_{Kin} das 1.69 fache des Wertes der Kreisbewegung (**blau**) ist. Man erhält dann durch Einsetzen $\epsilon = 0.69$ und erfüllt somit die Ellipsenbedingung.

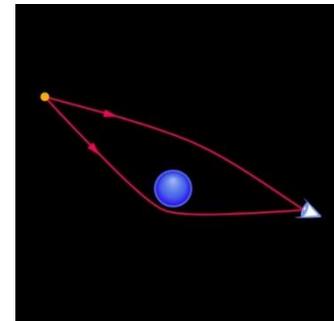
Erhöht man weiter die kinetische Energie auf genau das Doppelte des Wertes der Kreisbewegung, dann wird $E_{\text{Total}} = E_{\text{Pot}} + E_{\text{Kin}} = (-C / r_E + \frac{1}{2} m_E v_E^2) = 0$, die Geschwindigkeit $v_E^2 = 2 C / (r_E m_E)$, und man erhält die **parabolische** Bahnbedingung mit $\epsilon^2 = 1$,

also die in **rot** gezeichnete Kurve. Die Sonne könnte die Erde nur noch ablenken, aber nicht mehr an sich binden.

Bei noch grösserer Geschwindigkeit bekäme man **hyperbolische** Bahnen. In **grün** gezeichnet ist der Fall mit E_{Kin} als das 3.38 fache des Wertes der Kreisbewegung, entsprechend $\epsilon = 2.38$. Für die sehr hohe Energie von E_{Kin} gleich 32 mal so gross wie der Wert bei der Kreisbewegung

würde die hyperbolische Bahn kaum mehr unterscheidbar sein von einer **geradlinigen** Bahnbewegung (*schwarz*) der Erde. Die Gravitationskraft zwischen Erde und Sonne wäre dann zu schwach, um noch eine merkliche Querablenkung zu verursachen.

Dieser Tatbestand, dass eine geradlinige Bewegung einer freilauenden Kugel zwischen zwei Punkten, wie man sie aus dem Alltag kennt und die im Schulunterricht als einfachstes Beispiel der euklidischen Geometrie gelehrt wird, nur ein idealisierter, nicht-physikalischer Vorgang ist, mag manchen verblüffen. Man sieht zwar den Gravitationseinfluss in der durch das Gewicht bestimmten Reibungskraft der rollenden Kugel auf die Unterlage und in der daraus sich ergebenden Abbremsung, aber nicht die stets vorhandene, wenn auch meist zu geringe Querablenkung durch benachbarte Massen. Im atomaren wie im kosmischen Bereich ist dies jedoch anders.



Zwei verschieden starke hyperbolische Ablenkungen des Körpers durch das Zentralgestirn

8 ABBREMSUNG EINES SATELLITEN IN DER ERDATMOSPHERE

Hier beziehen wir uns auf eine Trouville, ein Meisterwerk der frühen Raumfahrtgeschichte



Walter Hohmann,
Quelle: Zeitschrift
"Mensch und Weltraum"

aus den Jahren 1920-1925 *Die Erreichbarkeit der Himmelskörper* von Walter Hohmann (1880-1945).¹¹ Der Autor, Bauingenieur und Baureferent bei der Stadt Essen, beschäftigte sich zeitlebens mit Fragen der Raumfahrt, stand in stetem Kontakt zu Raumfahrtpionieren wie Hermann Oberth, und sein auch didaktisch hervorragend aufgebautes Buch beeinflusste Wernher von Braun später bei der Planung der Apollo-Programme der NASA.¹² Es behandelt mit gängigen mathematischen Methoden, wie man sie am Gymnasium lernt, fünf anspruchsvolle Fragestellungen der Raumfahrt wie *Loslösung von der Erde*, *Rückkehr zur Erde*, *Freie Fahrt im Raum*, *Umfahrung anderer Himmelskörper* und *Landung auf anderen Himmelskörpern*.

Bei der Untersuchung der *Rückkehr zur Erde* nimmt Hohmann an, dass das rückkehrende Raumschiff diese in einer parabolischen Flugbahn anfliegt, und es dann nicht durch Zünden von Bremsdüsen, sondern nur passiv durch die Luftmoleküle der Atmosphäre abgebremst werden soll, um sicher auf der Erde zu landen. Dieser atmosphärische Bremsseffekt wirkt merklich nur in Luftschichten bis etwa 100 km Höhe, darüber ist die Anzahl von Luftmolekülen und somit der Luftdruck zu gering, um eine Bremswirkung zu zeigen. Den Parabelscheitel der Anflugbahn legt er deshalb in eine Höhe von 75 km über Grund, so dass das Raumschiff bei einer

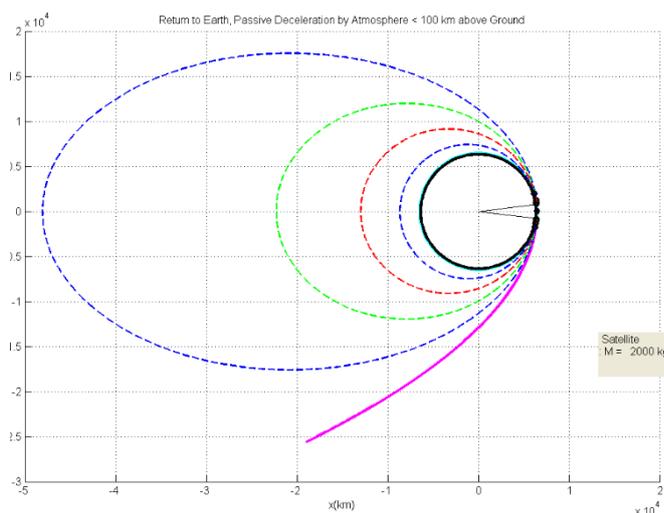
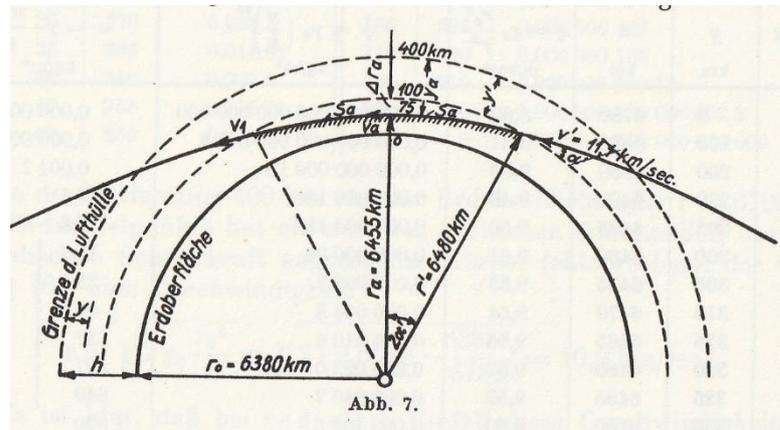
¹¹ Walter **Hohmann**, *Die Erreichbarkeit der Himmelskörper*, R. Oldenbourg Verlag München, Wien (1994), ISBN 3-486-23106-5. Das allerdings vergriffene Buch kann man antiquarisch bei Amazon bekommen für einen allerdings horrenden Preis.

¹² Es gibt aber auch bei Amazon eine deutlich günstigere, allerdings englische Version der NASA: NASA TT F-44 TECHNICAL TRANSLATION. F-44, *The Attainability of heavenly Bodies*. By Walter Hohmann

Anfluggeschwindigkeit von 11 km/s bei einem Azimutwinkel von $\varphi = -7.1^\circ$ in die Erdatmosphäre bei 100 km Luftschichthöhe eintaucht, ab dann zunehmend immer stärker gebremst und auch erhitzt wird.

Der Luftwiderstand ist $W = w F \psi$, wobei w der Druck auf die Frontfläche F des Raumschiffs ist, also die Flächenprojektion senkrecht zur Flugrichtung, und ψ ein von der Oberflächenform abhängiger Beiwert mit $\psi = 1$ für eine ebene Frontfläche, jedoch $\psi = 0.5$ für eine strömungsgünstigere konvexe Halbkugel. Der Bremsdruck w wiederum hängt vom Luftdruck ρ und quadratisch von der Fluggeschwindigkeit v ab. Durch Wahl der Neigung des Raumschiffs kann man dann F und somit die Abbremsung so einstellen, dass auf die Astronauten nicht zu starke Bremskräfte wirken und auch keine zu starke Erhitzung erfolgt.

Durch den Luftwiderstand W kommt es zu einer zunehmenden Abnahme der kinetischen Energie innerhalb des Bremswinkelsegments und, wie in den vorherigen Kapiteln ausgeführt, zu einer Umwandlung der Parabelbahn in Ellipsen mit zunehmend kleinerem ϵ . Die durch das Abbremsen erfolgte Reduzierung der kinetischen Energie und damit die Verkleinerung des Wertes von ϵ ist ein differentieller Effekt und somit verlässt das Raumschiff das Bremswinkelsegment (Flughöhe kleiner 100 km) nicht symmetrisch bei $\varphi = +7.1^\circ$, sondern leicht später bei $\varphi = +7.9^\circ$.



Die Austrittsgeschwindigkeit liegt dann bei $v = 10.4$ km/h, wurde also nur leicht verringert, und es ergibt sich eine elliptische Bahn mit $\epsilon = 0.76$ (Tabelle). Das Raumschiff fährt danach ungebremst die erste Umlaufellipse (*blau*) ab (mit langer Halbachse von $27.25 \cdot 10^3$ km) und einer Umlaufzeit von 12.44 h, bis es erneut in die Atmosphäre eintaucht, weiter abgebremst wird und in eine zweite, jedoch deutliche kleinere Ellipse (*grün*) (lange Halbachse $14.37 \cdot 10^3$ km, $\epsilon = 0.55$) einbiegt und sie in kürzerer Zeit von 4.76 h durchfährt.

Die dritte Ellipse mit $\epsilon = 0.34$ wird in 2.65 h durchlaufen und die vierte, die mit $\epsilon = 0.15$ bereits nahezu eine kreisförmige Struktur aufweist, in 1.81 h. Hohmann beschreibt dann weiter, wie man bei dieser allerdings immer noch sehr hohen Geschwindigkeit von 8.4 km/s oder 30'000 km/h die eigentliche Landung auf der Erde mittels damals bekannter Möglichkeiten aus der frühen Flugzeugtechnik durchführen könnte, wie z.B. durch Ausklappen von Flügeln etc.

All die genannten Flugdaten sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst. Zusätzlich sieht man hier auch für jeden der vier Orbits die jeweiligen Ein- und Austrittswinkel in den Bremsbereich, φ_A und φ_B . Zwischen ihnen ist die Flughöhe des Raumschiffs kleiner als 100 km und somit wird es darin abgebremst. Wie ersichtlich, verschieben sich von Orbit 1 zu Orbit 4 wegen der kleiner werdenden Flughöhe beide Winkel hin zu grösseren absoluten Werten (φ_A von -7.1° zu -12.1°) und (φ_B von 7.9° zu 18.0°). Das Bremssegment wird also grösser. Der zunehmende Verlust an kinetischer Energie verkleinert nicht nur ϵ , sondern führt auch zu einer leichten Drehung der Ellipsenachse, ausgedrückt durch den Winkel φ_M in der 5. Spalte der Tabelle (Periheldrehung).

Segment	Entry A: 100km	*	Exit B	*	Axis	Ellipse	**	Halbachsen						
	phiA	vA	phiB	vB	phiM	P	eps	T	**	A	B	C		
	deg	km/s	deg	km/s	deg	10 ³ km		h	**	10 ³ km				
Orbit 1:	-7.1	11.0	*	7.9	10.4	*	0.04	11.37	0.76	12.44	**	27.25	17.60	20.81
Orbit 2:	-8.3	10.4	*	8.9	9.8	*	-0.09	10.00	0.55	4.76	**	14.37	11.99	7.93
Orbit 3:	-9.6	9.8	*	11.0	9.1	*	-0.45	8.61	0.34	2.65	**	9.71	9.14	3.27
Orbit 4:	-12.1	9.1	*	18.0	8.4	*	-1.11	7.39	0.15	1.81	**	7.55	7.47	1.12

Moderne Raumfahrttechnik

Der Eintritt eines Raumschiffs in die Atmosphäre eines Planeten ist auch heutzutage ein kritisches Manöver, da das Raumschiff mit hoher Bahngeschwindigkeit sich dem Planeten nähert, und man die Geschwindigkeit stark reduzieren muss. Ein vorheriges Abbremsen auf eine weniger kritische Geschwindigkeit durch Zünden von Bremsraketen würde einen hohen Energieeinsatz und damit grosse Treibstoffmassen erfordern, die man während der gesamten Mission als Reserve mitführen müsste. Also wählt man, wenn immer es geht, die passive Abbremsung durch die Atmosphäre. Nur kennt man oft nicht ihre aktuelle Dichteverteilung, die zudem noch beeinflusst sein kann durch z.B. Sonnenaktivitäten; auch kennt man oft die Lage des Flugkörpers zu wenig oder zu spät, ob verdreht oder taumelnd. Das macht den Abbremsvorgang riskant und erfordert stets leichte Korrekturmassnahmen durch Steuerdüsen beim Landemanöver!

Die Wahl des Eintrittswinkels und des Anzielpunkts ist nun entscheidend, wie stark die Belastungen des Raumschiffs sein werden und auch wie schnell man die Landung durchführen kann. Hohmann wählte wie erwähnt 75 km als Scheitelpunkt der Anfahrparabel und vorsichtig einen flachen, nur etwa 3° grossen Eintrittswinkel, also für die Winkeldifferenz zwischen Parabelbahn und der kreisförmigen Luftschicht in 100 km Höhe über Grund. Dafür muss er dann mehrere Ellipsen fahren und Zeitverzögerungen von bis zu 20 Stunden in Kauf nehmen.

Die NASA hingegen wählt oft 122 km für den Scheitelpunkt und einen steileren Eintrittswinkel von etwa 6° .¹³ Die dadurch bedingten stärkeren thermischen Belastungen werden durch die Konstruktion des Hitzeschildes auf ein akzeptables Mass reduziert. Moderne Hitzschilder bestehen aus Kacheln meist aus hitzeresistenten Keramiken mit hoher Wärmekapazität, geringer Wärmeleitfähigkeit und gutem Abstrahlverhalten, die die Wärme von der Kapsel fernhalten.

¹³ <https://de.wikipedia.org/wiki/Wiedereintritt>

Alternativ verwendet man auch Hitzekacheln aus Materialien, die die Wärme absorbieren und das Material verdampfen.

Hohmann setzte in seinen Beispielen sehr vorsichtig den Abbremsvorgang an, da er nicht wusste, ob und wie stark man Mensch und Material belasten konnte. Dennoch ist bewundernswert, wie sehr er vor 100 Jahren nicht nur die Bedeutung der Raumfahrt für die Menschheit klar gesehen hat, sondern auch, wie realistisch er bereits für die eingangs genannten fünf *Missionen* die Betriebsbedingungen abgeschätzt hat.

9 SCHLUSSBEMERKUNG

Wir haben gezeigt, dass die empirisch aus astronomischen Beobachtungen abgeleiteten Keplerschen Gesetze (1609 bis 1619), die das heliozentrische Weltbild von Kopernikus (1543) bestätigten, Isaac Newton zur Aufstellung des Gravitationsgesetzes (Gleichung 2) führten. Dieses ist trotz seiner Einfachheit von grosser und allgemeiner Bedeutung. Es fasst nicht nur die Keplerschen Gesetze und die tellurische Schwerkraft in einer einzigen Aussage zusammen, sondern beschreibt generell die Bewegung aller Himmelskörper als Folge gegenseitig aufeinander wirkender Gravitationskräfte.

Die Bewegungsbahn eines Körpers im Schwerefeld anderer Massenkörper kann allerdings, wenn mehr als zwei Körper im Spiel sind, nicht mehr algebraisch geschlossen angegeben werden. Dann muss die Bewegung der Körper numerisch berechnet werden durch iterative Integration der Bewegungsgleichungen. Stellt man dann experimentell fest, dass es bei einer Planetenbewegung kleine Abweichungen zu den Rechenergebnissen gibt, kann man als Ursache den Einfluss weiterer unbekannter Planeten vermuten.

So schloss man im 19. Jahrhundert aus Abweichungen der Bewegung des Planeten Uranus auf eine unbekannt störende Masse. *John Couch Adams* (1819-1892) und unabhängig von ihm *Urbain Jean Joseph Leverrier* (1811-1877) berechneten die Position des hypothetischen Störplaneten. *Johann Gottfried Galle* (1812-1910) und sein Assistent *Heinrich d'Arrest* (1822-1875) fanden dann den vermuteten Planeten am 23. September 1846 an der berechneten Stelle im Sternbild Wassermann, den Neptun.