

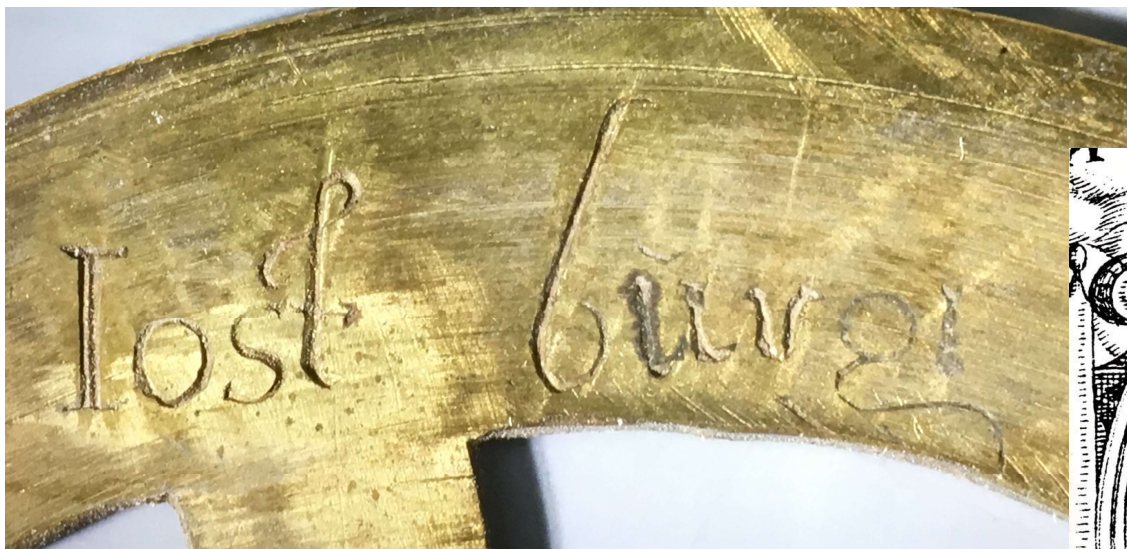
„Rechnen mit Bürgi“

Lehrstück nach Hans Brüngger et al.



Roman Oberholzer, Lehrer für Mathematik, Luzern
Mitglied der Jost-Bürgi-Initiative

Jost Bürgi Symposium April 2022



Jost Bürgi (*1552 in Lichtensteig,
†1632 in Kassel)

Handwritten mathematical formulas on a light blue background:

- $\log_b\left(\frac{u}{v}\right) = \log_b u - \log_b v$
- $\log_b\left(\frac{u}{\log_b v}\right) = \log_b\left(b^{\frac{\log_b u}{\log_b v}}\right)$
- $\log_b b^r = r$
- $\log_2\left(\frac{1}{2}\right)$
- $\log_2\left(\frac{1}{4}\right)$

Abstract

Das Rechnen mit den Logarithmen fällt (fast) allen Schüler/innen schwer. Gibt es einen einfachen, für sie nachvollziehbaren Zugang zu den Logarithmen? – Ja, und erst noch einer, der Jost Bürgi mit ins Boot nimmt.

Inhalt

1. Lehrkunstdidaktik
2. Das Lehrstück „Rechnen mit Bürgi“ nach Hans Brüngger et al.
3. Gedanken zum Lehrstück
4. Fragen, Diskussion, Ideen, ...?



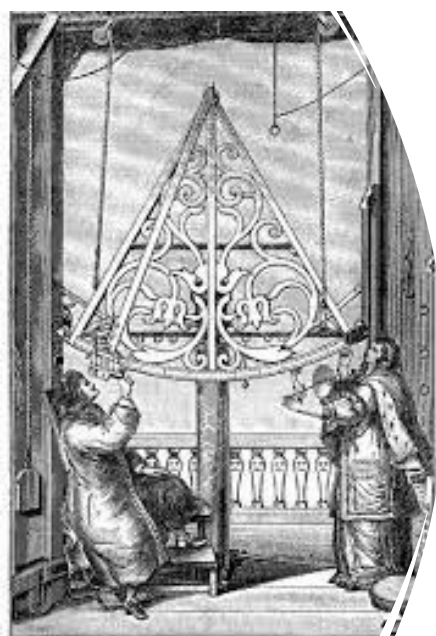
1. Lehrkunstdidaktik

- Lehrstück = lebendig gestaltete, zusammenhängende Lernaufgabe
- Fragen der damaligen Zeit – eben wie bei Jost Bürgi die Frage "Wie kann ich effizient rechnen?" – selbst erforschen
- Verdichtung schulischer Lernprozesse zu Bildungsprozessen



1. Lehrkunstdidaktik - Beispiele

- Der würfelnde Chevalier de Méré
- Das Paradoxon von Xenon
- Die Quadratwurzelschnecke
- Der Zahlenstrahl vervollständigt sich
- Vom Ungelösten zum Unvorstellbaren
- ... in anderen Fächern



2. Das Lehrstück „Rechnen mit Bürgi“ *nach Hans Brüngger et al.*

Einordnung

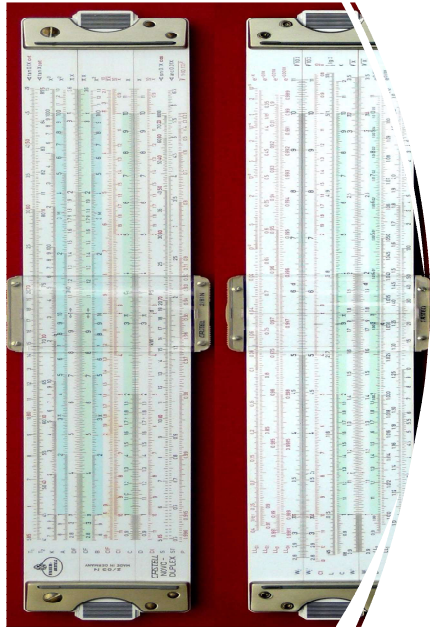
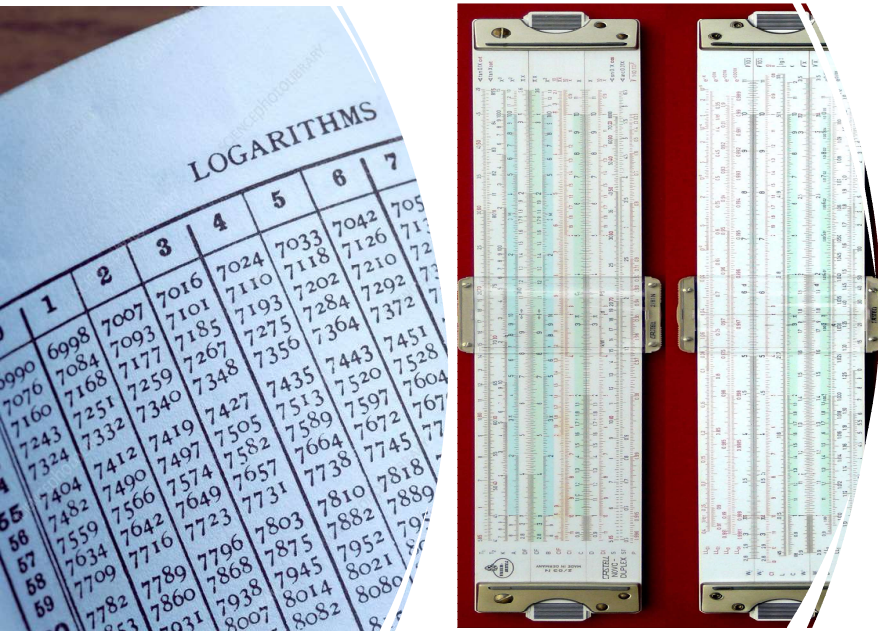
- Unmengen von Zahlenmaterial im 16. Jh. aufgrund von astronomischen Beobachtungen (Kopernikus, Galilei, Brahe, Kepler) sowie der Seefahrerei
- Jost Bürgi erkannte in der Rechentabelle von Michael Stifel, dass die mühsame Multiplikation/Division durch die schnelle Addition/Subtraktion der Exponenten ersetzt werden kann

tari uidetur in progressionē numerorum naturalī, dum seruit progressionī.

Sed ostendenda est ista speculatio per exemplum.

-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64

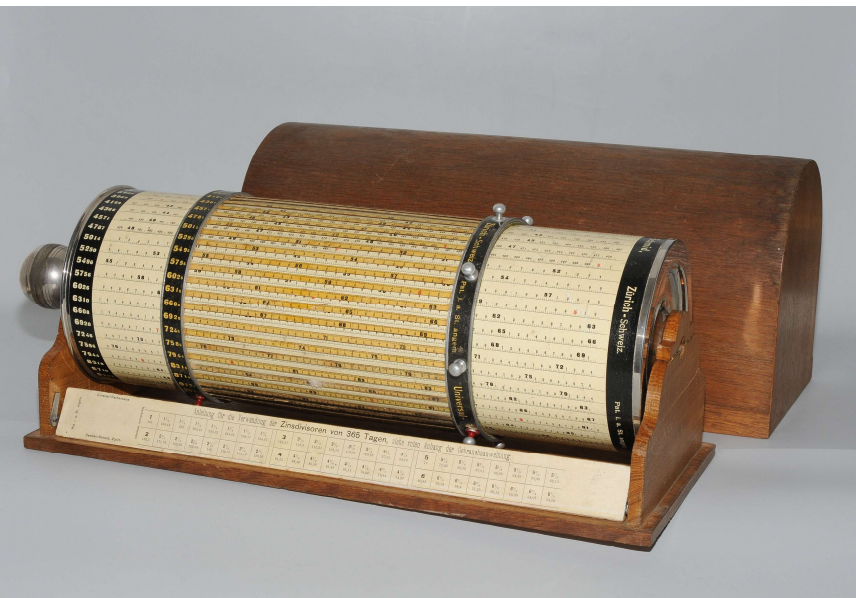
Possit hic fere nouus liber integer scribi de mirabilibus numerorum, sed oportet ut me hic subducā, & clausis oculis ab ea. Repetam uero unum ex superioribus, ne frustra dicar fuisse in campo isto. Sed sententia inuerfa repetam quod mihi repetendum uidetur.



2. Das Lehrstück „Rechnen mit Bürgi“ *nach Hans Brüngger et al.*

Einordnung

- von Logarithmen zu logarithmischen Skalen und weiter zu Rechenschiebern und Rechenmaschinen
- Erfindung der Logarithmen = grösster Schub an Rechenkapazität vor der Erfindung des Computers
- dank letzteren technische Erfindungen des 17./18./19. und 20. Jh.





2. Das Lehrstück „Rechnen mit Bürgi“ *nach Hans Brüngger et al.*

Einordnung

- Titel «Rechnen mit Bürgi» ist besser als «Logarithmen mit Bürgi», da er stärker auf die Leitfrage "Wie wurde in der Zeit vor den Taschenrechner/ Computern gerechnet?" abzielt; Bürgis rote/schwarze Zahlen helfen dabei
- für gymnasialen Unterricht des 10. Schuljahres, 8-10 Lektionen

Hans Brüngger

Logarithmen mit Bürgi

Ein Lehrstück der Mathematik zu den Logarithmen, entwickelt in Lehrkunstwerkstätten von und mit Hans Christoph Bürgi sowie im Unterricht erprobt und weiterentwickelt von Hans Brüngger, Cornelia Ritter, Bernhard Griesser, Klaus Stalder, Johanna Hess u. a.



JOST BÜRGI
1552-1632



„Die Erfindung der Logarithmen verschaffte der Menschheit den grössten Schub an Rechenkapazität vor der Erfindung des Computers.“
„Der Rechenschieber hat die Eisenbahn, die Elektrizität, das Auto, den Flugzeug, das Fernsehen, Atombomben und Kraftwerke, den Laser und den Transistor buchstäblich erst möglich gemacht.“

(M. Kordos)

Ausgabe

2. Das Lehrstück „Rechnen mit Bürgi“ *nach Hans Brüngger et al.*

Aufbau

- **Ouverture:** Bürgi und das Ringen um das wahre Weltbild um 1600
- **I. Akt:** Michael Stifel und die Exponentenrechnung
- **II. Akt:** Bürgi und die Rechentafel
- **III. Akt:** Logarithmen und deren Gesetze
- **IV. Akt:** Die logarithmische Skala und der Rechenschieber
- **[V. Akt:** Die Rechenmaschine]
- **Finale:** Mathematik als Grundlage für Fortschritt

R. Oberholzer © 2022



1. $2.36 \cdot 2.65$
2. $7.85 : 4.26$ =
3. $6.84 \cdot 8.55$ =
4. $4.38 : 7.85$ =
5. $2650 \cdot 752$ =
6. $6000 : 73.9$ =
7. 8.49^2 =
8. $(5.86 \cdot 7.32) / 8.37$ =
9. $\sqrt{6.35}$ =
10. $\sqrt[3]{744}$ =

2. Das Lehrstück „Rechnen mit Bürgi“ *nach Hans Brüngger et al.*

Ouvertüre: *Bürgi und das Ringen um das wahre Weltbild um 1600*

- Fehlende Rechenkapazität in Astronomie und Seefahrerei
- Schüler/innen lösen (einfache) Rechen-Aufgaben ohne Taschenrechner

ur in progressionē numerorum natura
oni.
d ostendenda est ista speculatio per exempla

-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64

hic fere nouus liber integer scribi de mirabilibus
sed oportet ut me hic subducā, & clausis oculis
uero unum ex superioribus, ne frustra dicam
to. Sed sententia inuersa repetam quod mihi
tur.

2. Das Lehrstück „Rechnen mit Bürgi“ *nach Hans Brüngger et al.*

I. Akt: Michael Stifel und die Exponentenrechnung

- Stifels Idee:

-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64

$$\frac{1}{8} \cdot 64 = ? \rightarrow 2^{-3} \cdot 2^6 = 2^{-3+6} = 2^3 = 8$$

ur in progressionē numerorum natura
oni.
d ostendenda est ista speculatio per exempla

-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64

hic fere nouus liber integer scribi de mirabilibus
sed oportet ut me hic subducā, & clausis oculis
uero unum ex superioribus, ne frustra dicam
to. Sed sententia inuersa repetam quod mihi
tur.

2. Das Lehrstück „Rechnen mit Bürgi“ *nach Hans Brüngger et al.*

Item man soll multipliciren 32 mit 256 ihre rotze Zahl sind 5 und 8
thuet zusammen dieße schwarze Zahl ist 8192 und so viel kombt so man
32 mit 256 multipliciert.

4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192

$$32 \cdot 256 = ?$$

$$5 + 8 = 13$$

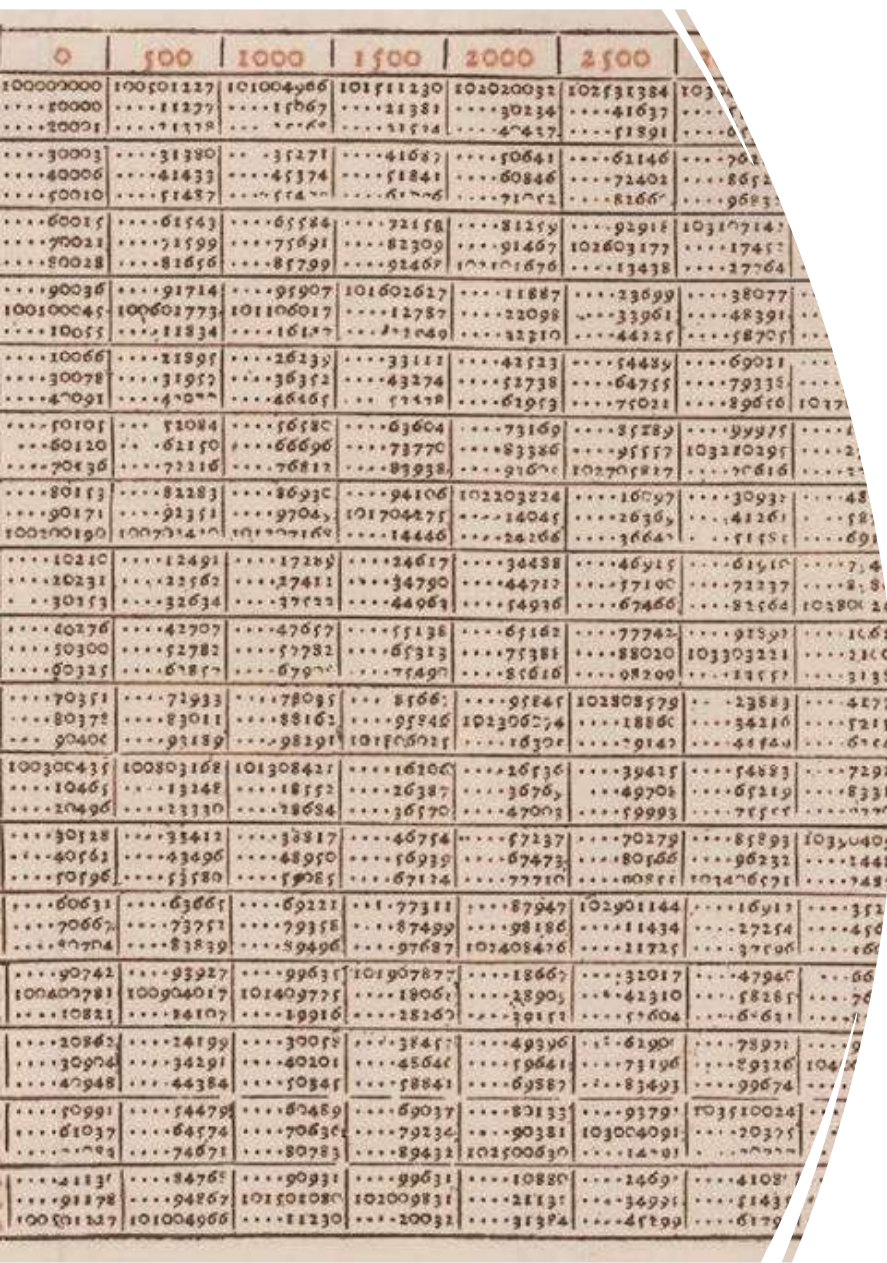
$$2^5 \cdot 2^8 = 2^{5+8} = 2^{13} = 8192$$

2. Das Lehrstück „Rechnen mit Bürgi“ *nach Hans Brüngger et al.*

II. Akt: Bürgis Logarithmentafel

- Verstehen von Jost Bürgis Logarithmentafel mit feinerer Unterteilung
- Erstellen der eigenen Tafel zur Basis 1.001 im Klassenverband
- Schüler/innen lösen mithilfe der selbst-erstellten Log-Tafel die ursprünglichen Aufgaben → erfolgreicher





2. Das Lehrstück „Rechnen mit Bürgi“ *nach Hans Brüngger et al.*

$$\begin{aligned} \underline{1.001^{n+1}} &= (1 + 0.001) \cdot 1.001^n \\ &= \underline{1.001^n} + 0.001 \cdot 1.001^n \end{aligned}$$

801	2.226876
	0.002227
802	2.229103
	0.002229
803	2.231332
...	...

1350	3.854824
	0.003854
1351	3.858679
	0.003859
1352	3.862538
...	...

2. Das Lehrstück „Rechnen mit Bürgi“ *nach Hans Brüngger et al.*

$$\begin{aligned}
 2.37 \cdot 3.28 &= 1.001^{863} \cdot 1.001^{1188} \\
 &= 1.001^{863+1188} = 1.001^{2051} \\
 &= \underline{\underline{7.77}}
 \end{aligned}$$

863	2.37
...	...
1188	3.28
...	...
2051	7.77
...	...



2. Das Lehrstück „Rechnen mit Bürgi“ *nach Hans Brüngger et al.*

a) $18 \cdot 2.65$

b) $\sqrt{180}$

c) $\sqrt{18}$

d) $5.73 \cdot 3.24$

e) $\sqrt{48.85}$

f) $5.27 : 8.49$

Bemerkung: $1.001^{2304} = 10$

$$\ln(u \cdot v) = \ln(u) + \ln(v)$$

$$\ln\left(\frac{u}{v}\right) = \ln(u) - \ln(v)$$

$$\ln(u^v) = v \cdot \ln(u)$$

$$\ln \sqrt[n]{u} = \frac{1}{n} \cdot \ln(u)$$

2. Das Lehrstück „Rechnen mit Bürgi“ *nach Hans Brüngger et al.*

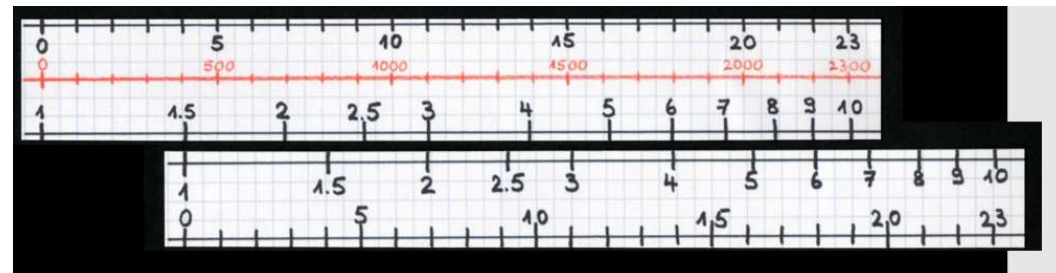
III. Akt: Logarithmen und deren Gesetze

- Definition der roten Exponenten als Logarithmen
- aufgrund der Addition/Subtraktion der Exponenten sind die Log-Gesetze offensichtlich
- Schüler/innen lösen Aufgaben zum Logarithmus

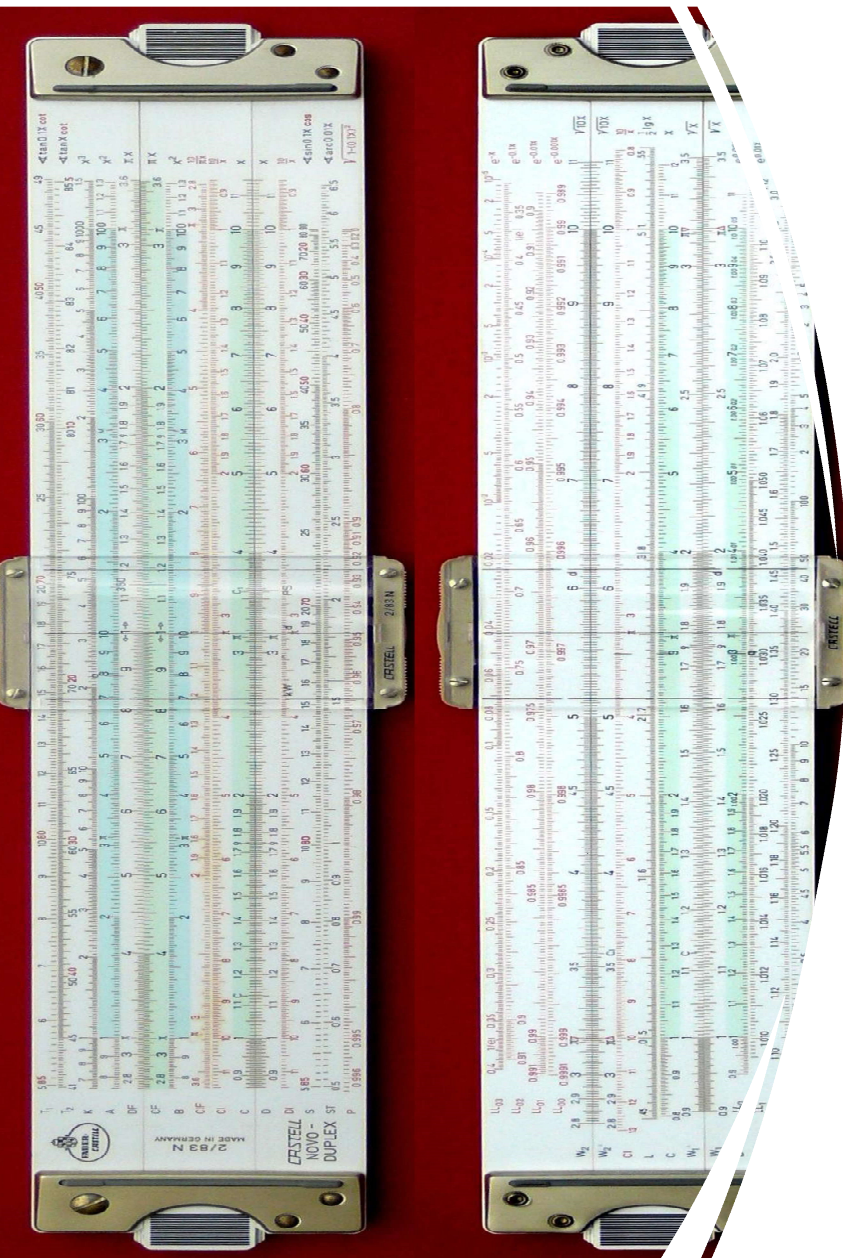
2. Das Lehrstück „Rechnen mit Bürgi“ *nach Hans Brüngger et al.*

IV. Akt: *Die logarithmische Skala und der Rechenschieber*

- Erstellen eines eigenen Rechenschiebers, mit Übungen dazu



R. Oberholzer © 2022



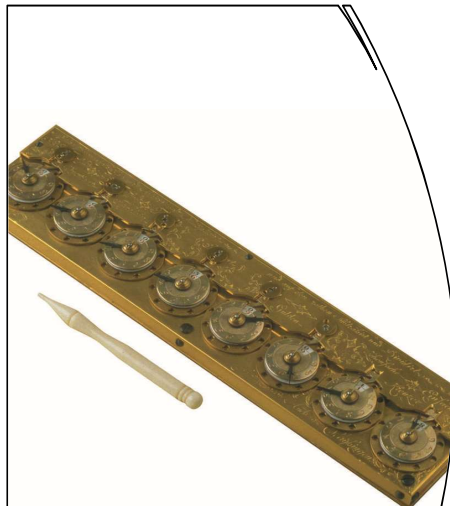
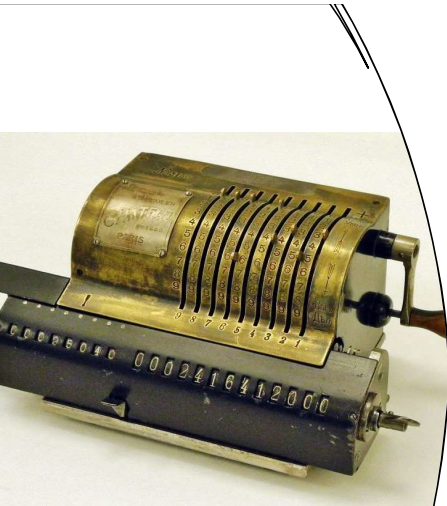
2. Das Lehrstück „Rechnen mit Bürgi“ *nach Hans Brüngger et al.*

- logarithmische Skalen auf dem Rechenschieber erlauben die Multiplikation/Division als Addition/Subtraktion
- Rechenschieber als weitere Revolution des Rechnens; er war für 350 Jahre DER Taschenrechner in den technischen Berufen

2. Das Lehrstück „Rechnen mit Bürgi“ *nach Hans Brüngger et al.*



- Je länger die Skala, desto feiner die Einteilung, desto genauer die Resultate → Rechenwalzen
- Evtl. Lösen der zu Beginn gestellten Aufgaben mithilfe des Rechen-schiebers



2. Das Lehrstück „Rechnen mit Bürgi“ *nach Hans Brüngger et al.*

[V. Akt: Die Rechenmaschine als Alternative]

- Parallel zum Rechnen mit Logarithmen entstanden Rechenmaschinen, wo z.B. die Multiplikation durch fortlaufende Addition maschinell ausgeführt wird. Ein Highlight der Rechenmaschinen ist die Curta von Curt Herzstark.



2. Das Lehrstück „Rechnen mit Bürgi“ *nach Hans Brüngger et al.*

Finale: Mathematik als Grundlage für Fortschritt

- Würdigung der rechnerischen Hilfsmittel, ausgehend von den Logarithmen, als wichtige Basis für wissenschaftliche & technische Veränderungen bis ca. 1970
- Der Himmelsglobus als finale Verbindung von Wissenschaft, Kunst und Kunsthandwerk



2. Das Lehrstück „Rechnen mit Bürgi“ *nach Hans Brüngger et al.*

Finale: *Mathematik als Grundlage für Fortschritt*

- Mit Logarithmen können Exponentialgleichungen gelöst werden: «Wie viele Jahre dauert es, bis sich der Wert eines Oldtimers verdoppelt, wenn sich sein Wert jährlich um 3.2% steigert?»



3. Gedanken zum Lehrstück

Schüler/innen-Feedback (positiv)

- Abwechslung im Unterricht
- Gruppen- bzw. praktische Arbeiten
- Blick in die Technikgeschichte, Rechenmaschinen zum Anfassen



3. Gedanken zum Lehrstück

Schüler/innen-Feedback (negativ)

- Logarithmus doch noch nicht ganz verstanden
- Tabellenschreiben optimieren
- Wer eine Lektion verpasst, findet kaum wieder Anschluss



3. Gedanken zum Lehrstück

Einschätzung

- klare Dramaturgie und Genese mit dem Resultat, wie wichtig Logarithmen waren (und sind) → Meilenstein ersichtlich
- Schüler/innen erleben, wie mühsam Handrechnen ist und welch grosse Entlastung die Log-Tabelle brachte



3. Gedanken zum Lehrstück

Einschätzung

- Logarithmus ist erfahrbar als Exponent, bleibt kein technischer, abstrakter Begriff
- Gruppen- und Klassenarbeit
- selbstentdeckendes Lernen
- historischer Aspekt
- grosse, aber spannende Vorbereitung für Lehrperson zu Beginn

Literatur/Quellen/Bezug

Hans Brüngger: „Logarithmen mit Bürgi“, ein Lehrstück der Mathematik zu Logarithmen, entwickelt in Lehrkunstwerkstätten, unter anderem mit Hans Christoph Berg u.a.

Bezugsquelle des Dossiers (Fr 20.00 + Versandkosten) und weitere Informationen direkt bei Hans Brüngger,
hans.bruengger@bluewin.ch

www.lehrkunst.ch

4. Fragen, Diskussion, Ideen, ...?

- Kommentare?
- Fragen?
- Ideen?
- ...?

A historical logarithm table, likely from a 17th-century mathematical work. It features columns for numbers from 100 to 3000 and rows for logarithmic values. The table is printed on aged, slightly yellowed paper.

$$\begin{aligned}\log_b\left(u \cdot \frac{1}{v}\right) &= \log_b\left(\frac{u}{v}\right) = \log_b u - \log_b v \\ \log_b\left(\frac{b^{\log_b u}}{b^{\log_b v}}\right) &= \log_b(b^{\log_b u - \log_b v}) \\ \frac{a^m}{a^n} &= a^{m-n}; \log_b b^r = r \quad \left| \log_2\left(\frac{64}{8}\right) = \log_2 64 - \log_2 8 \right.\end{aligned}$$

