"Rechnen mit Bürgi"

Lehrstück nach Hans Brüngger et al.

Roman Oberholzer, Lehrer für Mathematik, Luzern Mitglied der Jost-Bürgi-Initiative

Jost Bürgi Symposium April 2022





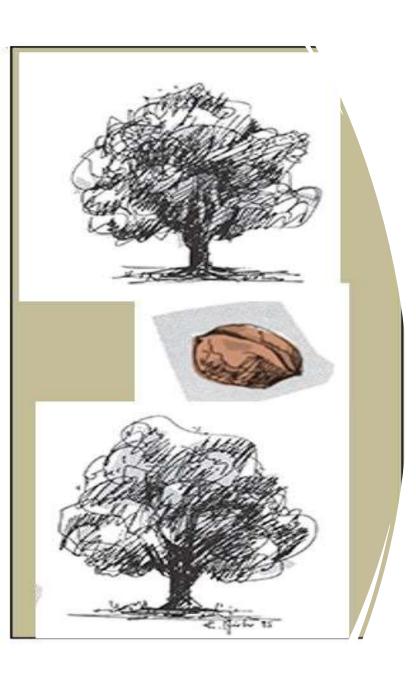
Abstract

Das Rechnen mit den Logarithmen fällt (fast) allen Schüler/innen schwer. Gibt es einen einfachen, für sie nachvollziehbaren Zugang zu den Logarithmen? – Ja, und erst noch einer, der Jost Bürgi mit ins Boot nimmt.

Inhalt

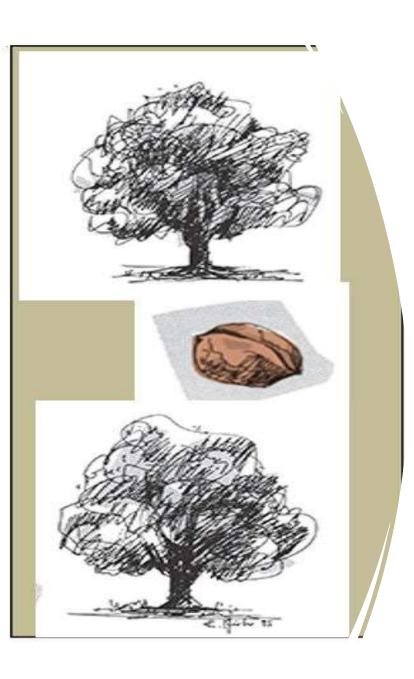
- 1. Lehrkunstdidaktik
- 2. Das Lehrstück "Rechnen mit Bürgi" nach Hans Brüngger et al.
- 3. Gedanken zum Lehrstück
- 4. Fragen, Diskussion, Ideen, ...?





1. Lehrkunstdidaktik

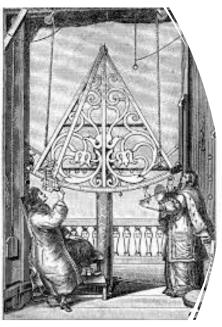
- Lehrstück = lebendig gestaltete, zusammenhängende Lernaufgabe
- Fragen der damaligen Zeit eben wie bei Jost Bürgi die Frage "Wie kann ich effizient rechnen?" – selbst erforschen
- Verdichtung schulischer Lernprozesse zu Bildungsprozessen



1. Lehrkunstdidaktik - Beispiele

- Der würfelnde Chevalier de Méré
- Das Paradoxon von Xenon
- Die Quadratwurzelschnecke
- Der Zahlenstrahl vervollständigt sich
- Vom Ungelösten zum Unvorstellbaren
- ... in anderen Fächern







tari uidetur in progrefiione numerorum naturali, dum feruit progrefiioni.

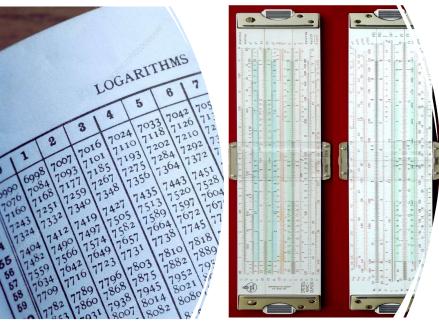
Sed oftendenda est ista speculatio per exemplum.

Posset hic fere nouus liber integer scribi de mirabilibus numerorum sed oportet ut me hic subducă, & clausis oculis abeă. Repetam uero unum ex superioribus, ne frustra dicar fuisse in campo isto. Sed sententia inuersa repetam quod mihi repetena dum uidetur.

2. Das Lehrstück "Rechnen mit Bürgi" nach Hans Brüngger et al.

Einordnung

- Unmengen von Zahlenmaterial im 16. Jh. aufgrund von astronomischen Beobachtungen (Kopernikus, Galilei, Brahe, Kepler) sowie der Seefahrerei
- Jost Bürgi erkannte in der Rechentabelle von Michael Stifel, dass die mühsame Multiplikation/Division durch die schnelle Addition/Subtraktion der Exponenten ersetzt werden kann





Einordnung

- von Logarithmen zu logarithmischen Skalen und weiter zu Rechenschiebern und Rechenmaschinen
- Erfindung der Logarithmen = grösster Schub an Rechenkapazität vor der Erfindung des Computers
- dank letzteren technische Erfindungen des 17./18./19. und 20. Jh.





Einordnung

- Titel «Rechnen mit Bürgi» ist besser als «Logarithmen mit Bürgi», da er stärker auf die Leitfrage "Wie wurde in der Zeit vor den Taschenrechner/ Computern gerechnet?" abzielt; Bürgis rote/schwarze Zahlen helfen dabei
- für gymnasialen Unterricht des 10.
 Schuljahres, 8-10 Lektionen



Hans Brüngger

Logarithmen mit Bürgi

Ein Lehrstück der Mathematik zu den Logarithmen, entwickelt in Lehrkunstwerkstätten von und mit Hans Christoph Be sowie im Unterricht erprobt und weiterentwickelt von Hans Brüngge Cornelia Ritter, Bernhard Griesser, Klaus Stalder, Johanna Hess u. a



"Die Erfindung der Logarithmen verschaftte der Menschheit den grössten Schub an Rechenkapazität vor der Erfindung des Computers "Der Rechenschieber hat die Eisenbahn, die Elektrizität, das Auto, das Flugzeug, das Fernsehen, Atombomben und Kraftwerke, den Laser den Transistor buchstäblich erst möglich gemacht." (M. Kordos)

Ausgr

2. Das Lehrstück "Rechnen mit Bürgi" nach Hans Brüngger et al.

Aufbau

- Ouvertüre: Bürgi und das Ringen um das wahre Weltbild um 1600
- I. Akt: Michael Stifel und die Exponentenrechnung
- II. Akt: Bürgi und die Rechentafel
- III. Akt: Logarithmen und deren Gesetze
- IV. Akt: Die logarithmische Skala und der Rechenschieber
- [V. Akt: Die Rechenmaschine]
- Finale: Mathematik als Grundlage für Fortschritt



- 1. 2.36 · 2.65
- 2. 7.85:4.26
- 3. 6.84 · 8.55
- 4. 4.38:7.85
- 5. 2650 · 752
- 6. 6000:73.9
- $7.8.49^2$
- 8. (5.86 · 7.32) / 8.37
- 9. $\sqrt{6.35}$
- 10. $\sqrt[3]{744}$

Ouvertüre: Bürgi und das Ringen um das wahre Weltbild um 1600

- Fehlende Rechenkapazität in Astronomie und Seefahrerei
- Schüler/innen lösen (einfache)
 Rechen-Aufgaben ohne
 Taschenrechner



ur in progressione numerorum natura, oni.
d ostendenda est ista speculatio per exemp

|-3 |-2 |-1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

hic fere nouus liber integer scribi de mirabi sed oportet ut me hic subducă, & clausis ocu uero unum ex superioribus, ne frustra dica to. Sed sententia inuerfa repetam quod mih tur.

2. Das Lehrstück "Rechnen mit Bürgi" nach Hans Brüngger et al.

I. Akt: Michael Stifel und die Exponentenrechnung

• Stifels Idee:

-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
1/8	1/4	1/2	1	2	4	8	16	32	64

$$\frac{1}{8} \cdot 64 = ? \rightarrow 2^{-3} \cdot 2^{6} = 2^{-3+6} = 2^{3} = 8$$



ur in progressione numerorum natura, oni. d ostendenda est ista speculatio per exemp

|-3|-2|-1| 0| 1| 2| 3| 4| 5| 6| | 1/8| 1/4| 1/2| 1| 2| 4| 8| 16| 32| 64|

hic fere nouus liber integer scribi de mirabi sed oportet ut me hic subducă, & clausis ocu uero unum ex superioribus, ne frustra dica to. Sed sententia inuerfa repetam quod mih tur.

2. Das Lehrstück "Rechnen mit Bürgi" nach Hans Brüngger et al.

Item man foll multiplicirn 32 mit 256 ihre rothe Bahl sind 5 und 8 thuet zusammen dieße schwarze Bahl ist 8193 und so viel kombt so man 32 mit 256 multipliciert.

4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192

$$32 \cdot 256 = ?$$

$$5 + 8 = 13$$

$$2^{5} \cdot 2^{8} = 2^{5+8} = 2^{13} = 8192$$



					Cht will be		
0	500	1000	1500	2000	2500	A	
00003000	190501117	101004966	101711130	102020031	102531384	103 8	
****30003	11779	35271	*********	47437.	51891		
50010	41433	45374		60846	····61146	8652	
60015	1 61543	65584	72158	1 81259	192918	103107141	
50028	81656	85799	92467	101101676		1745	<u>k</u>
100100045	100601773	101106017	1 12787	****22098	The state of the s	48391	
10066				Marian Inches of the Parket	-	69011,	07-2 3-3-3-1
· · · · 30078	31952		(2428		64755	····79335 ····296c6	1077
60110		156580	63604	THE RESERVE AND THE PARTY OF TH	THE RESERVE OF THE PERSON NAMED IN COLUMN TWO IS NOT THE PERSON NAMED IN COLUMN TWO IS NAME	103210395	2
80113	THE RESERVE OF THE PERSON		94106		102705827	10616	48
100200190	92351	9704,		14045	26369	41261	691
10210				1 34438	··· 46915	161510	
30153	32634	37522	1 44 961	1 54936	67466		103800 24
50300	52782	57782	65313	****75388	****\$8020	103303221	2100
*****70351	1 71933	1 7809	1 \$166	1 95841	102808575	23883	4177
90400	93185	98191	ומונטעטוון	101306074			6264
100300435	13148	***** 18552	26387		1 49701	65219	8331
	1 35412		-	67137			10350409
50596					Particular Control of the Control of	96232	*********
7066	THE RESERVE TO STREET,	THE PERSON NAMED IN COLUMN TWO IS NOT THE OWNER.	A STATE OF THE PARTY OF THE PAR	10 10 10 10 10 10 10 10 10 10 10 10 10 1			352
9074			1 10190787	-		-	66
10040078	1 10090401	7 10140977	1 1806	2890	41310	58285	· · · · 76
12086	43429		1 4564	1 4939	6 - 1 - 6190	178971	104 8
[5099	8 4438	45034	THE RESIDENCE OF THE PARTY OF T	16988	2 8349	1 99674	
6103		4 7063	7923		1 10300409		
1	1 8476	: 9093	10200983	1 1088	1 1469		
100 (0113					44529		

II. Akt: Bürgis Logarithmentafel

- Verstehen von Jost Bürgis Logarithmentafel mit feinerer Unterteilung
- Erstellen der eigenen Tafel zur Basis 1.001 im Klassenverband
- Schüler/innen lösen mithilfe der selbsterstellten Log-Tafel die ursprünglichen Aufgaben → erfolgreicher

	Vaccation 1						
0	AND DESCRIPTION OF THE PERSON NAMED IN	1000	1500	2000	2500		
**** \$0000	11227	**** 15067	101711230	**** 10214	41627	103 8	
30003	31380		********	**** 50641	61146		
\$0010	····\$1433	**** \$5374	51841	***********	****72402	8652	
50015	51543	A STATE OF THE PARTY OF THE PAR		· · · · 81259	102603177	103107141	
90036	81656	85799	92467	102101676	13438	17764	
	100601773	101106017		*****22098	4 33061	CONTRACTOR NAMED IN COLUMN	
· · · · 10066	1395		33111	***********	54489	69011	
10101		46465	52428	61953		**** 296 60	1017
50120	61150	66696	73770	****\$3386	102705827		****2
80113	92351	9704,	101704175	102203224	2636,	41261	52
****10210	100701410			34438	_		691
30153	TOTAL THE STREET, STRE			****44717	37100		***** 8
50376 50300	52782	57782	65313		****\$8020	103303221	2160
80378	1 71933	1 78095		95841	102808579	H2550000000	
90406	93189	98191	tastement	16301	11129142	48 464	
100300435	****13148			3676,	· · · 49701	65219	8331
	1 35412	1 33817		67237	1 70279	85893 96232	10334409
50196	1 \$3280	1 2 808 2	1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1	77710	noste	וריושרמה	745
90667	*******	79351	6 97687	98180	5 11434		450
	10090401	10140977	110190787	1 1866	3101	1 47940	1 66
1 1082			5 3845	The same of the sa	THE RESIDENCE PROPERTY.	THE RESIDENCE OF THE PARTY OF T	1 0
	63429	4010	1 45.640	1 1964	1: 73196	1 29326	104 1
6103	7 6457	1 7063	9 69037	9038	103004091		17/
1	1 8476		1 99631	1101500030	1 1469	14108	7/
9117	8 9426	10110108	101009831	2113	1 34991	1 \$1437	
	N. Combone	Office States			-		7

$$\underline{1.001^{n+1}} = (1+0.001) \cdot 1.001^{n}$$
$$= 1.001^{n} + 0.001 \cdot 1.001^{n}$$

801	2.226876
	0.002227
802	2.229103
	0.002229
803	2.231332

1350	3.854824
	0.003854
1351	3.858679
	0.003859
1352	3.862538



0	AND DESCRIPTION OF THE PERSON NAMED IN	1000	1500	2000	2500		
· · · · £0000	11227	**** 15067	****11381	**** 40224	102531384	103 8	
****30003	31380		*********		61146	708	
\$0010	····\$1433	**** 654 ***	61706	····50846	****71401 ****8166*	8652	
50015	71599	75691	****82309	91467	102603177	****17452	
90036		Market Street,	PERSONAL PROPERTY.		13438	27764	
Company of the Compan	100601773	101106017	1 12787	Control Control (Control Control Contr	33961	48391	
30078	********	36339	43274	**********	54489	69011	
fo101	71084		63604	1 73169	35189	1 99975	
70436	72216	76812		91670	102705827		-
100200190	100701410	9704,	101704475	14045	2636,	41261	(8)
10210	111122562	27411	****34790	44712	···· 46915	72237	****7;4
40276	42707	11 V 14 STOCK 250 V CA 2.00	55138	1 65162		91597	
20322	A STREET OF THE STREET STREET	CONTRACT MUSICALISM	THE RESERVE OF THE PARTY OF THE			103303221	3135
90406	83011		101705021	101306274	1 18860		52:5
10030043	100803168	101308421	1 16100	7 26530	39415	154883	7291
++++20496	23330	28684	**** 36570	****4700	1 59993	78568	1
		48950	**** 56935	67473	805.55	**************************************	
6063	16366	6922		1 1 8794	7 102901144	···· 16912	352
9074			CONTRACTOR OF THE PARTY OF THE		7 3101		
	10090401	10140977		2890	42310	58285	1 76
3090	43429	14020	14564	1 1964		1 29326	104/2
15099	1 5447	9 5748	9 6903	7 ···· 8313	31 9379	103510024	1.7.
16103	1 7467	18078	38943	1 10150003	The second second	11	1 /
190 (0113	8 9426	2 101 (0108	10100083	1 2113	1 3499	1 \$1431	
				,,,,			7

$$2.37 \cdot 3.28 = 1.001^{863} \cdot 1.001^{1188}$$
$$= 1.001^{863+1188} = 1.001^{2051}$$
$$= 7.77$$

863	2.37
1188	3.28
2051	7.77



W. Y. W. S.						
0		1000	1500		2500	
· · · · £0000	11277	**** 15067	**** 21381	**** 30234	A STATE OF THE PARTY OF THE PAR	103 8
30003		35271	41687	****50641	61146	
50010	*** 51437	*******			8166	8652
50015 50018	71599	75691	82309 92467	91467		10310714:
100100045	100601773	101106017	1 12787	22098	33961	48391
10066	111995	26239	33111	****42523	54489	
totot	72084	46465	63604	61913		89616 1017
90136	The second second	76812	83938	91600	102705817	70616
90171	The second second second second	9704,		CONTRACTOR OF STREET	2636,	41261 58
10210	1 2 2 5 6 2	**** 27411	34790	****44712	\$7100	722378,8
50300	\$2707	57782	65313	65162	1 77742	91592 1661
····90315	1 71933	1 78095	1 8566	1 95841	102808575	23883 4177
90400	93189	98191	10150001	11830	29142	45 464 6-66
100300435	***** 13148	**** 18552	26387	1 3676,	1 49708	652198331
	43496	48950	***** 56935			962321448
7066	1 6366	6922	1	-	7 102901144	
9074	29392	7 9963	110190787	11866	7: 3101	7 47945 66
12086	1	7 1991	1 1906	3 3012	2 5760	6.621
	43429		1 45.64	1964	1: 73196	· · · · · 29326 104 X
6103		4 7063	7923		1 103004091	
9117	8 9426	10110108	10200983	1 1088	1 3499	1 4108 /
1100 (011)	7 10 100496	0 1123	015003	113139	44529	016179

Versuchen Sie, auch die folgenden Rechnungen mit unserer aufgehängten Tabelle zu bearbeiten:

b)
$$\sqrt{180}$$

e)
$$\sqrt{48.85}$$

Bemerkung: $1.001^{2304} = 10$



$$ln(u \cdot v) = ln(u) + ln(v)$$

$$ln\left(\frac{u}{v}\right) = ln(u) - ln(v)$$

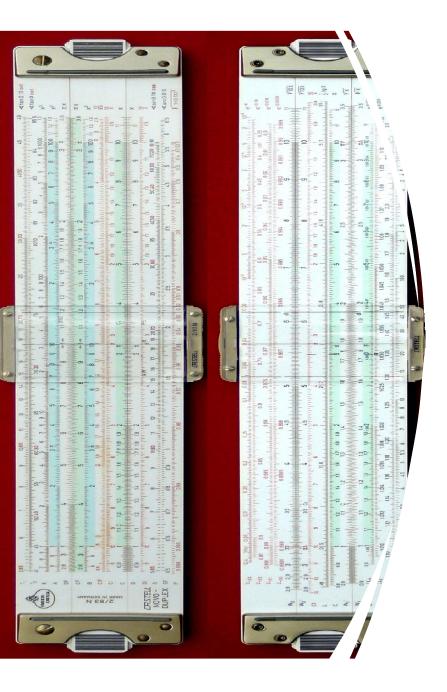
$$ln(u^v) = v \cdot ln(u)$$

$$\ln \sqrt[n]{u} = \frac{1}{n} \cdot \ln(u)$$

III. Akt: Logarithmen und deren Gesetze

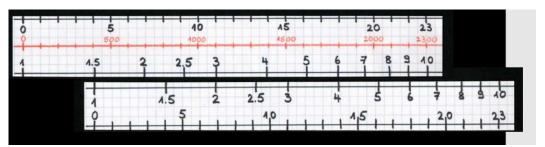
- Definition der roten Exponenten als Logarithmen
- aufgrund der Addition/Subtraktion der Exponenten sind die Log-Gesetze offensichtlich
- Schüler/innen lösen Aufgaben zum Logarithmus



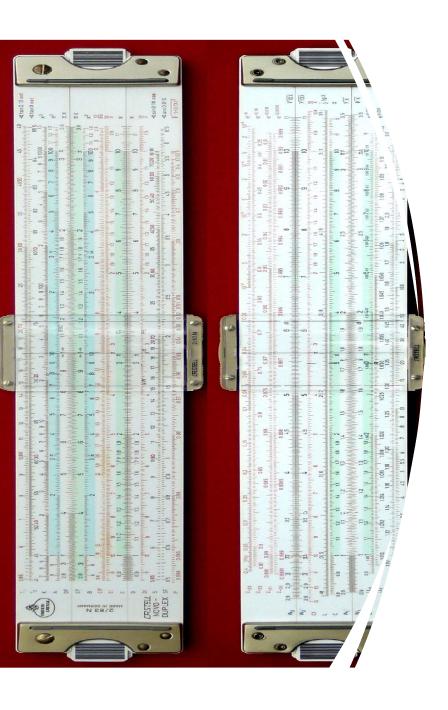


IV. Akt: Die logarithmische Skala und der Rechenschieber

• Erstellen eines eigenen Rechenschiebers, mit Übungen dazu





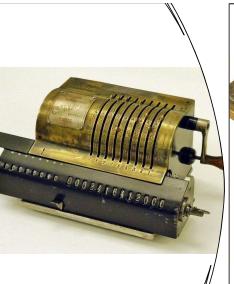


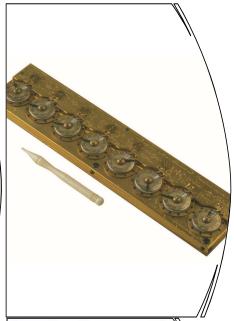
- logarithmische Skalen auf dem Rechenschieber erlauben die Multiplikation/ Division als Addition/Subtraktion
- Rechenschieber als weitere Revolution des Rechnens; er war für 350 Jahre DER Taschenrechner in den technischen Berufen



- Je länger die Skala, desto feiner die Einteilung, desto genauer die Resultate → Rechenwalzen
- Evtl. Lösen der zu Beginn gestellten Aufgaben mithilfe des Rechenschiebers











[**V. Akt:** Die Rechenmaschine als Alternative]

 Parallel zum Rechnen mit Logarithmen entstanden Rechenmaschinen, wo z.B. die Multiplikation durch fortlaufende Addition maschinell ausgeführt wird. Ein Highlight der Rechenmaschinen ist die Curta von Curt Herzstark.

R. Oberholzer © 2022



Finale: Mathematik als Grundlage für Fortschritt

- Würdigung der rechnerischen Hilfsmittel, ausgehend von den Logarithmen, als wichtige Basis für wissenschaftliche & technische Veränderungen bis ca. 1970
- Der Himmelsglobus als finale Verbindung von Wissenschaft, Kunst und Kunsthandwerk



Finale: Mathematik als Grundlage für Fortschritt

 Mit Logarithmen können Exponentialgleichungen gelöst werden: «Wie viele Jahre dauert es, bis sich der Wert eines Oldtimers verdoppelt, wenn sich sein Wert jährlich um 3.2% steigert?»



Schüler/innen-Feedback (positiv)

- Abwechslung im Unterricht
- Gruppen- bzw. praktische Arbeiten
- Blick in die Technikgeschichte,
 Rechenmaschinen zum Anfassen





Schüler/innen-Feedback (negativ)

- Logarithmus doch noch nicht ganz verstanden
- Tabellenschreiben optimieren
- Wer eine Lektion verpasst, findet kaum wieder Anschluss





Einschätzung

- klare Dramaturgie und Genese mit dem Resultat, wie wichtig Logarithmen waren (und sind) → Meilenstein ersichtlich
- Schüler/innen erleben, wie mühsam Handrechnen ist und welch grosse Entlastung die Log-Tabelle brachte





Einschätzung

- Logarithmus ist erfahrbar als Exponent, bleibt kein technischer, abstrakter Begriff
- Gruppen- und Klassenarbeit
- selbstentdeckendes Lernen
- historischer Aspekt
- grosse, aber spannende Vorbereitung für Lehrperson zu Beginn

Literatur/Quellen/Bezug

Hans Brüngger: "Logarithmen mit Bürgi", ein Lehrstück der Mathematik zu Logarithmen, entwickelt in Lehrkunstwerkstätten, unter anderem mit Hans Christoph Berg u.a.

Bezugsquelle des Dossiers (Fr 20.00 + Versandkosten) und weitere Informationen direkt bei Hans Brüngger, hans.bruengger@bluewin.ch

www.lehrkunst.ch



4. Fragen, Diskussion, Ideen, ...?

• Kommentare?

• Fragen?

• Ideen?

